# 26 春线代 A 学习笔记

Qiyu Zhang 编著

https://zhangqiyu.me

2025 年 11 月

# 目录


线性代数 A（II）—— 4’ . . . 1
〇·上课笔记 . . . 1
0.1 26-03-02 . . . 1
0.2 26-03-04 . . . 1
0.3 26-03-09 . . . 1
0.5 26-03-16 . . . 2
一·多项式 &Lambda 矩阵 . . . 5
1.1 多项式 & 数论 . . . 5
1.2 Lambda 矩阵 . . . 6
1.3 Lambda 矩阵与数阵的联系 . . . 9
1.4 复数域中的讨论 . . . 11
1.5 任意数域中的讨论 . . . 14
1.6 作业 . . . 16
1.7 补充练习 . . . 21
1.8 一些疑惑与解答 . . . 21
二·线性空间 . . . 22
2.1 域 F 上线性空间的基和维数 . . . 22
2.2 子空间的交与和 . . . 23
2.3 商空间 . . . 26
2.4 域 F 上线性空间的同构 . . . 29
2.5 作业 . . . 30
zyf 班作业 . . . 30
dyw 班作业 . . . 36
2.6 补充练习 . . . 38
2.7 一些疑惑与解答 . . . 38
三·线性映射 . . . 42
3.1 线性映射及其运算 . . . 42
3.2 线性映射的核与象 . . . 46
3.3 线性映射和线性变换的矩阵表示 . . . 49
3.4 线性函数与对偶空间 . . . 49
3.5 线性变换的特征值与特征向量 & 对角化 . . . 51
3.6 线性变换的不变子空间，Hamilton-Cayley 定理 . . . 53
3.7 线性变换与矩阵的最小多项式 . . . 56
3.8 幂零变换的 Jordan 标准形 . . . 60
3.9 线性变换的约当标准形 . . . 61
3.10 作业 . . . 63
zyf 班作业 . . . 63

dyw 班作业 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63
3.10 补充练习 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 72
3.11 一些疑惑与解答 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 72
四·期中复习 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 73
4.1 21 春期中真题 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 73
4.2 22 春期中真题 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 79
4.3 23 春期中真题 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 83
4.4 24 春期中真题 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 88
4.5 25 春期中真题 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 92
4.6 题型总结 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 93
五·具有度量的线性空间 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 96
5.1 双线性函数 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 96
5.2 补充练习 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 101

# 线性代数 A（II）—— $4'$

## 〇 · 上课笔记

### 0.1 26-03-02

1.dyw 班顺序：

- 线性空间
- 线性映射
- Jordan 标准形
- 内积空间
- 张量

2.推荐书目：《Linear algebra done right》

3.数域：域的概念

4.定义 2.1.1（纠偏：数乘分配律 1，2 并非单纯左右乘关系）

5.线性空间几条小性质：

- 0 元唯一
- 负元唯一
- 0 乘任何向量为 0（只要对某个$v$满足$w+v=v$即可推出$w=0$）
- $\lambda 0=0$
- $(-1)v=-v$
- $\lambda v=0\Rightarrow\lambda=0$or$v=0$

### 0.2 26-03-04

1.$W_1+W_2$为包含$W_1\cup W_2$的最小线性空间

证：显然$W_1$和$W_2$都包含在$W_1+W_2$中，因此只需证明：包含$W_1\cup W_2$的线性空间$U$必包含$W_1+W_2$。任意$w_1\in W_1,w_2\in W_2$，由于$U$是线性空间，因此$w_1+w_2\in U$，因此$W_1+W_2\subseteq U$。

### 0.3 26-03-09

1.一个线性映射总能写成一个单射和一个双射和一个满射的复合，

$$V\to V/KerT\leftrightarrow ImT\twoheadrightarrow W$$

## 0.5 26-03-16

【T1】$V$是线性空间，$\alpha_i,\beta_i(i=1,2,3,4)\in V$满足$\beta_3=\alpha_1-2\alpha_2,\beta_4=\alpha_1+2\alpha_3,\alpha_3=\beta_1+2\beta_2,\alpha_4=\beta_2+2\beta_3$，求：

- (1)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$到$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的过渡矩阵
- (2)$\alpha=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4$在$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$下的坐标

解：

- (1)设$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$到$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$的过渡矩阵为$P$，则有

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$$

由题意

$$\begin{cases}\beta_1=4\alpha_1-8\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_4\\ \beta_2=-2\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_4\\ \beta_3=\alpha_1-2\alpha_2\\ \beta_4=\alpha_1+2\alpha_3\end{cases}$$

从而

$$P=\begin{pmatrix}4&-2&1&1\\-8&4&-2&0\\1&0&0&2\\-2&1&0&0\end{pmatrix}$$

- (2)设$\alpha$在$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$下的坐标为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$，则有

$$\alpha=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)P\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

故

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=$$

【T2】令$W_1=\left\{\begin{pmatrix}a&0&c\\0&0&0\\c&b&0\end{pmatrix},a,b,c\in R\right\},W_2=\left\{\begin{pmatrix}x&0&0\\0&y&0\\0&z&z\end{pmatrix},x,y,z\in R\right\}$，问：

- (1)$W_1+W_2$是否为直和
- (2)求$W_3$使得$M_3(R)=(W_1+W_2)\oplus W_3$

解：

- (1)任取$\alpha \in W_1 \cap W_2$，则存在$a,b,c,x,y,z \in R$使得$\alpha = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ c & b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & z & z \end{pmatrix}$，从而$a = x, b = y = 0, c = z = 0$，因此$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in R \right\}$，故$W_1 + W_2$不为直和。
- (2)$W_1$一组基为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

，$W_2$一组基为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

，因此$W_1 + W_2$的一组基为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

。而$M_3(R)$的维数为 9，因此$W_3$的维数为$9 - 5 = 4$，且$W_3$的一组基可以选为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故$W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & w \\ y & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x, y, z, w \in R \right\}$。

【T3】令$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$，

$$\mathcal{A} : M_2(R) \to M_2(R)$$
$$X \to AX$$

，

- (1)求$ImA, KerA$的维数与一组基
- (2)将(1)求的$ImA$的基扩充成$M_2(R)$的一组基

解:

- (1)由$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+2x_3 & x_2+2x_4 \\ 2x_1+4x_3 & 2x_2+4x_4 \end{pmatrix} = O$得到$x_1 = -2x_3, x_2 = -2x_4$，因此

$$KerA = \left\{ \begin{pmatrix} -2x_3 & -2x_4 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, x_3, x_4 \in R \right\}$$

，$\dim KerA = 2$，$KerA$的一组基为

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

又由于$AX=O$的解空间维数为2，因此$ImA$的维数为$4-2=2$，又$ImA=\left\{\begin{pmatrix} x_1+2x_3 & x_2+2x_4 \\ 2x_1+4x_3 & 2x_2+4x_4 \end{pmatrix}, x_i, x_j \in R\right\}$，因此$ImA$的一组基为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- (2)将$ImA$的一组基

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

扩充成$M_2(R)$的一组基，可以添加

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**【T4】** $\dim V=n, \dim V_1=\dim V_2=\dim V_3=n-1$，$V_1, V_2, V_3$是$V$的子空间是否一定有$(V_1+V_2)\cap V_3=(V_1\cap V_3)+(V_2\cap V_3)$

解：不一定，在$K^2$中取$V_1=\langle e_1\rangle, V_2=\langle e_2\rangle, V_3=\langle e_1+e_2\rangle$

下面我们研究怎么找反例：

**【T5】** $\mathcal{A}: V\to V$为线性映射，证：$V=KerA\oplus ImA \Leftrightarrow ImA=Im(A^2)$

证：必要性：若$V=KerA\oplus ImA$，则任取$y\in ImA$，则存在$x\in V$使得$Ax=y$，又由于$V=KerA\oplus ImA$，因此存在唯一的$x_1\in KerA, x_2\in ImA$使得$x=x_1+x_2$，因此$Ax=Ax_1+Ax_2=Ax_2$，又由于$x_2\in ImA$，因此存在$x_3\in V$使得$Ax_3=x_2$，因此$A^2x_3=Ax_2=y$，从而$ImA\subseteq Im(A^2)$，反过来$Im(A^2)\subseteq ImA$是显然的，因此$ImA=Im(A^2)$。

充分性：若$ImA=Im(A^2)$，则任取$v\in V$，则$Av\in ImA$，又$ImA=Im(A^2)$，因此存在$u\in V$，使得$A^2u=Av$，从而$A(Au-v)=0$，即$Au-v\in KerA$，因此$v-Au\in KerA$，令$x_1=v-Au, x_2=Au$，则$x_1\in KerA, x_2\in ImA$且$v=x_1+x_2$，因此$V=KerA+ImA$。任取$x\in KerA\cap ImA$，则存在$y\in V$使得$Ay=x$，又由于$x\in KerA$，因此$Ax=A^2y=0$，而$ImA=Im(A^2)\Leftrightarrow KerA=Ker(A^2)$故$A^2y=0\Rightarrow y\in Ker(A^2)\Rightarrow y\in KerA\Rightarrow Ay=0$，因此$x=0$，从而$KerA\cap ImA=\{0\}$，因此$V=KerA\oplus ImA$。

**【T6】** $W$为$M_n(K)$的子空间，满足$\forall A\in M_n(K), B\in W, AB\in W$ 设$W$中矩阵秩最大为$r$，证明：$\dim W=nr$

证：

# 一 · 多项式 &Lambda 矩阵

## 1.1 多项式 & 数论

**定理 1.1.1**（带余除法定理）设$f(x), g(x) \in K[x]$，且$g(x) \neq 0$，则存在唯一的一对多项式$h(x), r(x) \in K[x]$，使得$f(x) = g(x)h(x) + r(x)$，且$r(x) = 0$或$\deg r(x) < \deg g(x)$。

**定义 1.1.1**（最大公因式）设$f(x), g(x) \in K[x]$，且不全为零，则存在唯一的首一多项式$d(x) \in K[x]$，使得$d(x)$是$f(x)$和$g(x)$的公因式，并且任何$f(x)$和$g(x)$的公因式都整除$d(x)$。

**定义 1.1.2**（最小公倍式）设$f(x), g(x) \in K[x]$，且不全为零，则存在唯一的首一多项式$l(x) \in K[x]$，使得$f(x)$和$g(x)$都是$l(x)$的因式，并且任何包含$f(x)$和$g(x)$的因式的多项式都整除$l(x)$。

**定理 1.1.2**（裴蜀定理）设$f(x), g(x) \in K[x]$，则存在多项式$h(x), k(x) \in K[x]$，使得

$$h(x)f(x) + k(x)g(x) = \gcd(f(x), g(x))$$

证：不妨设$\deg f(x) \geq \deg g(x)$，

$$\begin{aligned}
f(x) &= u_1(x)g(x) + r_1(x) \\
g(x) &= u_2(x)r_1(x) + r_2(x) \\
r_1(x) &= u_3(x)r_2(x) + r_3(x) \\
&\cdots \\
r_{k-2}(x) &= u_k(x)r_{k-1}(x) + r_k(x) \\
r_{k-1}(x) &= u_{k+1}(x)r_k(x) + 0
\end{aligned}$$

此时$r_k(x) = \gcd(f(x), g(x))$，且$r_k(x)$可表示为$f(x), g(x)$的线性组合（可往上回溯证明）。

得证。

**定理 1.1.3**（多个多项式的最大公因式 & 最小公倍式）设$f_1(x), f_2(x), ..., f_{n(x)} \in K[x]$，则存在唯一的首一多项式$d(x) \in K[x]$，使得$d(x)$是$f_1(x), f_2(x), ..., f_{n(x)}$的公因式，并且任何$f_1(x), f_2(x), ..., f_{n(x)}$的公因式都整除$d(x)$。同时存在唯一的首一多项式$l(x) \in K[x]$，使得$f_1(x), f_2(x), ..., f_{n(x)}$都是$l(x)$的因式，并且任何包含$f_1(x), f_2(x), ..., f_{n(x)}$的因式的多项式都整除$l(x)$。且gcd和lcm满足交换律和结合律。

**定理 1.1.4**（最大公因式与最小公倍式的关系）设$f(x), g(x) \in K[x]$，则有

$$\gcd(f(x), g(x)) \cdot \operatorname{lcm}(f(x), g(x)) = f(x) \cdot g(x)$$

证：若$f(x)g(x) = 0$，此时结论显然成立。

不妨设$d(x) = \gcd(f(x), g(x))$，则存在多项式$f_1(x), g_1(x) \in K[x]$，使得

$$f(x) = d(x)f_1(x), g(x) = d(x)g_1(x), \gcd(f_1(x), g_1(x)) = 1$$

令$m(x)=d(x)f_1(x)g_1(x)$，则$f(x)\mid m(x),g(x)\mid m(x)$，设$f(x)\mid u(x),g(x)\mid u(x)$，则存在多项式$s(x),t(x)\in K[x]$，使得

$$u(x)=f(x)s(x)=g(x)t(x)$$

，从而

$$d(x)f_1(x)s(x)=d(x)g_1(x)t(x)$$

，即

$$f_1(x)s(x)=g_1(x)t(x)$$

，由

$$\gcd(f_1(x),g_1(x))=1$$

可知$g_1(x)\mid s(x)$，设$s(x)=g_1(x)v(x)$，则$u(x)=f(x)s(x)=d(x)f_1(x)g_1(x)v(x)=m(x)v(x)$，从而$m(x)\mid u(x)$。

得证。

## 1.2 Lambda 矩阵

**定义 1.2.1（Lambda 矩阵的秩）** 设$A(\lambda)$为 Lambda 矩阵，若存在正整数$r$，使得$d_r(A)\neq 0$且$d_{r+1}(A)=0$，则称$r$为$A$的秩，记为$rank(A)$。若对任意正整数$r$，都有$d_r(A)=0$，则称$A$的秩为 0，记为$rank(A)=0$。（$d_r(A)$表示$A$的$r$阶子式，一个矩阵的$k$阶子式是指其任意选取$k$个行和$k$个列的元素构成的行列式）

**定义 1.2.2（Lambda 矩阵的可逆性）** 设$A(\lambda)\in M_{n(K)}$为 Lambda 矩阵，若存在$B(\lambda)\in M_{n(K)}$使得$A(\lambda)B(\lambda)=B(\lambda)A(\lambda)=I_n$，则称$A$是可逆的，且称$B$为$A$的逆矩阵。

**定理 1.2.1（Lambda 矩阵的可逆的充要条件）** 设$A(\lambda)\in M_{n(K)}$为 Lambda 矩阵，则$A(\lambda)$可逆当且仅当其行列式$\det A(\lambda)$为非零常数。

解：必要性：若$A(\lambda)$可逆，则存在$B(\lambda)\in M_{n(K)}$使得$A(\lambda)B(\lambda)=I_n$，从而$\det(A(\lambda)B(\lambda))=\det I_n=1$，又有$\det(A(\lambda)B(\lambda))=\det A(\lambda)\cdot\det B(\lambda)$，因此$\det A(\lambda)$为非零常数。

充分性：若$\det A(\lambda)$为非零常数，则$\det A(\lambda)\cdot\det B(\lambda)=1$，从而$\det B(\lambda)=\frac{1}{\det A(\lambda)}$，因此存在$B(\lambda)\in M_{n(K)}$使得$A(\lambda)B(\lambda)=I_n$，即$A(\lambda)$可逆。

得证。

**定义 1.2.3（Lambda 矩阵的初等变换）** 设$A(\lambda)$为 Lambda 矩阵，则对$A(\lambda)$施行下列变换之一，称为对$A(\lambda)$施行了一次初等变换：

- (1)交换$A(\lambda)$的两行（列）；
- (2)将$A(\lambda)$的某一行（列）乘以非零常数$c\in K$；
- (3)将$A(\lambda)$的某一行（列）加上另一行（列）的$\varphi(\lambda)$倍。

定义 **1.2.4**（**Lambda** 矩阵的等价）设$A(\lambda),B(\lambda)\in M_{n(K)}$为 Lambda 矩阵，若存在可逆的 Lambda 矩阵$P(\lambda),Q(\lambda)\in M_{n(K)}$使得$P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)=B(\lambda)$，则称$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价。

定理 **1.2.2**（**Lambda** 矩阵经过初等变换可化为标准形）任意一个非 0 的$s\times n$的 Lambda 矩阵$A(\lambda)$，都等价于

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_{r(\lambda)} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

，$d_i(\lambda)$为首一多项式，满足$d_1(\lambda)\mid d_2(\lambda)\mid \dots \mid d_r(\lambda)$。

证：

引理 1.2.1：设$A(\lambda)$左上角元素$a_{11}(\lambda)\neq 0$，并且$a_{11}(\lambda)$不能整除所有元素，则可找到$B(\lambda)$与$A(\lambda)$等价，且$B(\lambda)$左上角元素$b_{11}(\lambda)\neq 0$且次数小于$a_{11}(\lambda)$的次数。

1.若$A(\lambda)$第一列有一个元素$a_{i1}(\lambda)$不能被$a_{11}(\lambda)$整除，则有

$$a_{i1}(\lambda)=a_{11}(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda)$$

，其中$r(\lambda)$不为零且次数小于$a_{11}(\lambda)$的次数。对$A(\lambda)$施行初等变换：用第$i$行减去第 1 行的$q(\lambda)$倍，再交换第 1 行和第$i$行，得到矩阵$B(\lambda)$即为所求。

2.与 1 同理。

3.若$A(\lambda)$第一行和第一列的元素均能被$a_{11}(\lambda)$整除，但$a_{11}(\lambda)$不能整除所有元素，则必然存在某个元素$a_{ij}(\lambda)$不能被$a_{11}(\lambda)$整除。设$a_{i1}(\lambda)=a_{11}(\lambda)\varphi(\lambda)$，则

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \dots & a_{1j}(\lambda) & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1}(\lambda) & \dots & a_{ij}(\lambda) & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \dots & a_{1j}(\lambda) & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{ij}(\lambda)-\varphi(\lambda)a_{1j}(\lambda) & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \dots & a_{ij}(\lambda)-(1-\varphi(\lambda))a_{1j}(\lambda) & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{ij}(\lambda)-\varphi(\lambda)a_{1j}(\lambda) & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

这样，就转化为了第 2 种情况。

引理得证。

经过行列交换，可使得$\boldsymbol{A(\lambda)}$左上角元素不为零。若其能整除所有元素，则将其作为$d_1(\lambda)$，把第一行和第一列的其它元素清0，并对剩余子矩阵重复上述过程。否则，利用引理1.2.1，不断施行初等变换，直到左上角元素能整除所有元素为止（定能在有限次完成，因为$\boldsymbol{a_{11}(\lambda)}$次数递减），然后再将其作为$d_1(\lambda)$，并对剩余子矩阵重复上述过程。如此反复进行有限次，直到所有元素均为0为止，即可得到所需的标准形。

**定义 1.2.5**（行列式因子）设$A(\lambda) \in M_{n(K)}$为 Lambda 矩阵，其$k$阶子式全体的公因式中次数最高的首一多项式称为$A(\lambda)$的$k$阶行列式因子，记为$d_k(\lambda)$。

**定理 1.2.3**（初等变换下的不变量）等价的 Lambda 矩阵具有相同的秩和行列式因子

证：只需证明，对$A(\lambda)$施行一次初等变换后变为$B(\lambda)$，其秩和行列式因子不变。设$A(\lambda)$与$B(\lambda)$的$k$阶行列式因子分别为$f(\lambda)$与$g(\lambda)$，我们证明$f = g$。

1.$A(\lambda)$经过交换行变为$B(\lambda)$时，任意$k$阶子式的值仅改变符号，因此$f(\lambda) = g(\lambda)$。

2.$A(\lambda)$经过某行乘以非零常数$c \in K$变为$B(\lambda)$时，任意$k$阶子式的值要么不变，要么也乘以$c$，因此$f(\lambda)$与$g(\lambda)$只差一个常数因子，从而$f(\lambda) = g(\lambda)$。

3.$A(\lambda)$经过$i$行加上$j$行的$\varphi(\lambda)$倍变为$B(\lambda)$时，那些包含$i$行和$j$行以及不包含$i$行的$k$阶子式的值均不变，只有那些包含$i$行但不包含$j$行的$k$阶子式的值会改变，但其按$i$行展开时，$i$行的元素均被替换为原$i$行元素加上$j$行元素的$\varphi(\lambda)$倍，因此该子式的值变为原子式值加上另一个子式值的$\varphi(\lambda)$倍，也就是该子式的值仍然是$A(\lambda)$的$k$阶子式的线性组合（类似于辗转相除法），因此$f(\lambda) = g(\lambda)$。

列变换同理。

得证。

**定理 1.2.4**（标准形的唯一性）Lambda 矩阵标准形唯一。

证：设$A(\lambda)$标准形

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其$k$阶行列式因子$D_k(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)...d_k(\lambda)$。于是$d_r(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}$。依此类推，可唯一确定所有$d_i(\lambda)$。

**定义 1.2.6**（不变因子）设$A(\lambda) \in M_{n(K)}$为 Lambda 矩阵，其标准形为

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

，其中$d_i(\lambda)$为首一多项式，满足$d_1(\lambda) \mid d_2(\lambda) \mid \dots \mid d_r(\lambda)$。称$d_i(\lambda)$为$A(\lambda)$的第$i$个不变因子。

**定理 1.2.5（Lambda 矩阵等价的充分条件）** 两个 Lambda 矩阵等价当且仅当它们具有相同的不变因子/行列式因子。

证明显然。

**推论 1.2.1（可逆矩阵的标准形）** 可逆的 Lambda 矩阵标准形为单位矩阵。

证：设$|A(\lambda)| = d$，则$D_n(\lambda) = 1$，又$D_k(\lambda) \mid D_n(\lambda)$，故$D_k(\lambda) = 1$，从而所有不变因子均为 1，标准形即为单位矩阵。

那么反过来，与$I_n$等价的矩阵一定是可逆矩阵，因为其行列式为非零常数。也就是说，

**推论 1.2.2（Lambda 矩阵可逆的充要条件）** Lambda 矩阵可逆当且仅当其标准形为单位矩阵。

又 $A(\lambda)$与 $B(\lambda)$等价充要条件是有初等矩阵 $P_1, \dots P_l$与 $Q_1, \dots Q_k$使得 $B(\lambda) = P_1 \dots P_l A(\lambda) Q_1 \dots Q_k$。特别的，当$A(\lambda) = I_n$时，就得到

**定理 1.2.6（Lambda 矩阵可逆的充要条件）** Lambda 矩阵可逆当且仅当其可以表示为一些初等矩阵的乘积。

**推论 1.2.3（Lambda 矩阵可逆的充要条件）** 两个$s \times n$矩阵$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价当且仅当存在可逆的$s \times s$矩阵$P(\lambda)$和可逆的$n \times n$矩阵$Q(\lambda)$使得$B(\lambda) = P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)$。

## 1.3 Lambda 矩阵与数阵的联系

**定理 1.3.1（大定理）** 设$A, B$是数域$P$上的$n$阶数阵，则$A \sim B$充要条件是它们的特征矩阵$\lambda I - A$与$\lambda I - B$等价。

证：

引理 1.3.1 若有$n$阶数阵$P, Q$，使得$\lambda I - A = P(\lambda I - B)Q$，则$A, B$相似。

证：由等式可得

$$\lambda I - A = \lambda PQ - PBQ$$

，由于等式对任意$\lambda$成立，则$I - PQ = 0$，从而$PQ = I$，即$Q = P^{-1}$，因此$A = PBP^{-1}$，即$A, B$相似。

引理 1.3.2 对任意不为 0 的$n$阶数阵$A$和$U(\lambda), V(\lambda)$，定存在数阵$U_0, V_0$和$Q(\lambda), R(\lambda)$使得

$$U(\lambda) = (\lambda I - A)Q(\lambda) + U_0$$
$$V(\lambda) = R(\lambda)(\lambda I - A) + V_0$$

证：把$U(\lambda)$改写为

$$U(\lambda) = D_0\lambda^m + D_1\lambda^{m-1} + ... + D_m$$

其中$D_0, D_1, ..., D_m$都是$n$阶数阵，且$D_0 \neq O$

1.若$m = 0$，令$U_0 = D_0, Q(\lambda) = 0$

2.$m > 0$，令$Q(\lambda) = Q_0\lambda^{m-1} + Q_1\lambda^{m-2} + ... + Q_{m-1}$，$Q_i$为数阵，那么

$$(\lambda I - A)Q(\lambda) + U_0 = Q_0\lambda^m + (Q_1 - AQ_0)\lambda^{m-1} + ... + (U_0 - AQ_{m-1})$$

只需

$$Q_0 = D_0$$
$$Q_1 = D_1 + AQ_0$$
$$......$$
$$U_0 = D_m + AQ_{m-1}$$

即可，同理可证$V(\lambda)$

证毕。

由推论 1.2.3，$\lambda I - A$与$\lambda I - B$等价就是存在可逆的 Lambda 矩阵$U(\lambda), V(\lambda)$使得

$$\lambda I - A = U(\lambda)(\lambda I - B)V(\lambda)$$

1.先证必要性：若$A, B$相似，则存在可逆的数阵$P$使得$A = PBP^{-1}$，从而

$$\lambda I - A = \lambda I - PBP^{-1} = P(\lambda I - B)P^{-1}$$

，因此$\lambda I - A$与$\lambda I - B$等价。

2.再证充分性：由等式

$$\lambda I - A = U(\lambda)(\lambda I - B)V(\lambda)$$

，利用引理 1.3.2，有数阵$U_0, V_0$使得

$$U(\lambda) = (\lambda I - A)Q(\lambda) + U_0$$
$$V(\lambda) = R(\lambda)(\lambda I - A) + V_0$$

，将其代入上式，得到

$$\begin{aligned} U(\lambda)^{-1}(\lambda I - A) &= (\lambda I - B)V(\lambda) \\ &= (\lambda I - B)(R(\lambda)(\lambda I - A) + V_0) \end{aligned}$$

则

$$(U(\lambda)^{-1} - (\lambda I - B)R(\lambda))(\lambda I - A) = (\lambda I - B)V_0$$

则

$$U(\lambda)^{-1}-(\lambda I-B)R(\lambda)=T_0(T_0\text{为数阵})$$
$$T_0(\lambda I-A)=(\lambda I-B)V_0$$

下面证明$T_0$可逆:

由上式

$$\begin{aligned}I&=U(\lambda)T_0+U(\lambda)(\lambda I-B)R(\lambda)\\&=U(\lambda)T_0+(\lambda I-A)V(\lambda)^{-1}R(\lambda)\\&=((\lambda I-A)Q(\lambda)+U_0)T_0+(\lambda I-A)V(\lambda)^{-1}R(\lambda)\\&=(\lambda I-A)(Q(\lambda)T_0+V(\lambda)^{-1}R(\lambda))+U_0T_0\end{aligned}$$

同理，只能

$$U_0T_0=I$$
$$Q(\lambda)T_0+V(\lambda)^{-1}R(\lambda)=0$$

故

$$\lambda I-A=U_0(\lambda I-B)V_0$$

由引理 1.3.1 知$A,B$相似。

证毕。

**推论 1.3.1**（数阵相似的充要条件）两个数阵$A,B$相似当且仅当它们有相同的不变因子。

## 1.4 复数域中的讨论

**定义 1.4.1**（初等因子） 把矩阵（线性变换）$A$的每个次数大于 0 的不变因子分解为互不相同的首一一次因式幂，称为$A$的初等因子。

那么，初等因子与不变因子的关系是怎样的呢？设$A$的第$i$个不变因子为

$$d_i(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_{i1}}(\lambda-\lambda_2)^{m_{i2}}...(\lambda-\lambda_k)^{m_{ik}}$$

，则$A$的初等因子为$k_{ij}\geq 1$的那些方幂，注意到$d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$，则$m_{ij}\leq m_{i+1j}$，因此，同一个一次因式幂次最高的必定出现在$d_n(\lambda)$中，依此类推。

这也说明了，在矩阵阶数已知情况下，不变因子与初等因子是可以相互推出的。

**定理 1.4.1**（复矩阵相似的充分必要条件）设$A,B$为复数域$C$上的$n$阶数阵，则$A,B$相似当且仅当它们有相同的初等因子。

因此，在复数域上研究矩阵相似问题时，只需研究初等因子即可（当然不变因子通用，但并没有初等因子求法简易）。在此之前，引入多项式的一个简单引理

**引理 1.4.1**（一个不太显然的多项式结论）若$f_1(\lambda),f_2(\lambda)$都与$g_1(\lambda),g_2(\lambda)$互素，则

$$\gcd(f_1(\lambda)g_1(\lambda), f_2(\lambda)g_2(\lambda)) = \gcd(f_1(\lambda), f_2(\lambda))\gcd(g_1(\lambda), g_2(\lambda))$$

证：设

$$d(\lambda) = \gcd(f_1(\lambda)g_1(\lambda), f_2(\lambda)g_2(\lambda))$$
$$d_1(\lambda) = \gcd(f_1(\lambda), f_2(\lambda))$$
$$d_2(\lambda) = \gcd(g_1(\lambda), g_2(\lambda))$$

则存在互素的$h_1(\lambda), h_2(\lambda)$，以及互素的$k_1(\lambda), k_2(\lambda)$使得

$$f_1(\lambda) = d_1(\lambda)h_1(\lambda)$$
$$f_2(\lambda) = d_1(\lambda)h_2(\lambda)$$
$$g_1(\lambda) = d_2(\lambda)k_1(\lambda)$$
$$g_2(\lambda) = d_2(\lambda)k_2(\lambda)$$

从而

$$d = \gcd(d_1d_2h_1k_1, d_1d_2h_1k_2)$$

显然$d_1d_2 \mid d$

另一方面，$d \mid f_1g_1, d \mid f_2g_2$，且$(f_1, g_1) = 1, (f_2, g_2) = 1$，可设$d = fg$，且$f \mid f_1, f_2$，$g \mid g_1, g_2$，从而$f \mid d_1, g \mid d_2$，因此$d \mid d_1d_2$。

综上，$d = d_1d_2$

证毕。

**引理 1.4.2（1.4.1 基础上的推论）** 若$f_1, f_2$都与$g_1, g_2$互素，则

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} f_1g_1 & 0 \\ 0 & f_2g_2 \end{pmatrix}$$

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} f_1g_2 & 0 \\ 0 & f_2g_1 \end{pmatrix}$$

，则$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价。

证:$A(\lambda), B(\lambda)$二阶行列式因子显然相等,而一阶行列式因子分别为$(f_1g_1, f_2g_2)$和$(f_1g_2, f_2g_1)$，由引理 1.4.1 知它们有相同的最大公因式，因此$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价。

**定理 1.4.2（初等因子求法）** 首先用初等变换化特征矩阵$\lambda I - A$为对角阵，然后将主对角元分解为一次方幂式的乘积，这些方幂即为$A$的初等因子。

证：设第$i$个对角元$h_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_{i1}}(\lambda - \lambda_2)^{k_{i2}}...(\lambda - \lambda_t)^{k_{it}} = (\lambda - \lambda_1)^{k_{i1}}g_i(\lambda)$，显然$(\lambda - \lambda_1)^{k_{i1}}, g_i(\lambda)$互素，那么它与它上下两个对角元可以对调$(\lambda - \lambda_1)^{k_{i1}}$位置，从而得到标准形，而二者分解后的所有一次方幂即为初等因子显然是相同的。

证毕。

下面我们讨论约当标准形。

对约当块

$$J_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

其$n$阶行列式因子$|\lambda I - J_0| = (\lambda - \lambda_0)^n$

其特征矩阵有一$n-1$阶子式为

$$\det \begin{pmatrix} -1 & \lambda - \lambda_0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} = (-1)^{n-1}$$

故其$1 \sim n-1$阶行列式因子为 1，立得初等因子为$(\lambda - \lambda_0)^n$。

那么，约当阵

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_s \end{pmatrix}$$

其中$J_i$是约当块，初等因子$(\lambda - \lambda_i)^{k_i}(1 \le i \le s)$，所以$\lambda I_{k_i} - J_i$等价于

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & (\lambda - \lambda_i)^{k_i} \end{pmatrix}$$

于是，$\lambda I - J$等价于

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & (\lambda - \lambda_1)^{k_1} & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & (\lambda - \lambda_s)^{k_s} \end{pmatrix}$$

从而，约当矩阵的初等因子即为其各个约当块的初等因子。

定理 **1.4.3**（约当标准形）任意复数域上的矩阵都与一个唯一的约当标准形相似。

证：设矩阵$A$的初等因子为$(\lambda-\lambda_1)^{k_1},...,(\lambda-\lambda_s)^{k_s}$，则构造约当矩阵

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & J_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & ... & J_s \end{pmatrix}$$

，其中$J_i$是初等因子$(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$对应的约当块。它们的特征矩阵的初等因子相同，由定理 1.4.1 知$A$与$J$相似，而约当标准形的唯一性显然（不考虑约当块排列次序）。

证毕。

推论 **1.4.1**（复矩阵相似于对角阵充要条件）复矩阵$A$相似于对角阵当且仅当其初等因子都是一次方幂式/不变因子无重根。

证：由约当标准形作法立得。

## 1.5 任意数域中的讨论

定义 **1.5.1**（友矩阵）对数域$P$上的多项式$d(\lambda)=\lambda^n+d_1\lambda^{n-1}+...+d_n$，其友矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & -d_n \\ 1 & 0 & ... & 0 & -d_{n-1} \\ 0 & 1 & ... & 0 & -d_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & ... & 1 & -d_1 \end{pmatrix}$$

我们来计算它的不变因子，设

$$\lambda I-A=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & ... & 0 & d_n \\ -1 & \lambda & ... & 0 & d_{n-1} \\ 0 & -1 & ... & 0 & d_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & ... & -1 & \lambda+d_1 \end{pmatrix}$$

显然，它有一个$n-1$阶子式为$(-1)^{n-1}$，接下来只需计算行列式

$$f(n)=|\lambda I-A|=\det\begin{pmatrix} \lambda & 0 & ... & 0 & d_n \\ -1 & \lambda & ... & 0 & d_{n-1} \\ 0 & -1 & ... & 0 & d_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & ... & -1 & \lambda+d_1 \end{pmatrix}$$

按第一列展开，有

$$f(n)=\lambda\det\begin{pmatrix}\lambda & \dots & 0 & d_{n-1}\\ -1 & \dots & 0 & d_{n-2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & -1 & \lambda+d_1\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & d_n\\ -1 & \dots & 0 & d_{n-2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & -1 & \lambda+d_1\end{pmatrix}$$
$$=\lambda f(n-1)+(-1)^{(n-1)+1}d_n(-1)^{n-2}$$
$$=\lambda f(n-1)+d_n$$

又$f(1)=\lambda+d_1$，从而递推可得

$$f(n)=\lambda^n+d_1\lambda^{n-1}+\dots+d_n=d(\lambda)$$

故其不变因子为$d(\lambda)$与$n-1$个 1。

定义 **1.5.2**（有理标准形）准对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & A_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & A_s\end{pmatrix}$$

，其中$A_i$是数域$P$上多项式$d_i(\lambda)$对应的友矩阵，且满足$d_1(\lambda)\mid d_2(\lambda)\mid\dots\mid d_s(\lambda)$，称为数域$P$上的有理标准形矩阵。

引理 **1.5.1**（次数关系）矩阵

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & A_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & A_s\end{pmatrix}$$

的不变因子为$1,1,1,\dots,d_1(\lambda),d_s(\lambda)$，其中 1 的个数为

$$\sum_{i=1}^{s}\deg d_i(\lambda)-s$$

证：设$A_i$是多项式$d_i(\lambda)$对应的友矩阵，则$A_i$的不变因子为$d_i(\lambda)$与$n_i-1$个 1，其中$n_i=\deg d_i(\lambda)$。因此，矩阵$A$的不变因子为$1,1,1,\dots,d_1(\lambda),d_s(\lambda)$，其中 1 的个数为$\sum_{i=1}^{s}\deg d_i(\lambda)-s$。

证毕。

定理 **1.5.1**（有理标准形）任意数域$P$上$n$阶方阵都与一个唯一的有理标准形相似。

证：设矩阵$A$的不变因子为$1,1,1,\dots,d_1(\lambda),\dots,d_s(\lambda)$，其中 1 的个数为$m=\sum_{i=1}^{s}\deg d_i(\lambda)-s$，则构造有理标准形矩阵

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & A_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & A_s\end{pmatrix}$$

，其中$A_i$是多项式$d_i(\lambda)$对应的友矩阵。它们有相同的不变因子，由定理 1.2.5 知$A$与$J$相似，而有理标准形的唯一性显然（不考虑友矩阵排列次序）。

证毕。

## 1.6 作业

【作业 1】$m,p,q$适合什么条件时，有

- (1)$x^2+mx-1 \mid x^3+px+q$
- (2)$x^2+mx+1 \mid x^4+px^2+q$

解：

- (1)利用次数关系可设$x^3+px+q=(x^2+mx-1)(ax+b)$,对比三次、零次项系数发现只能$x^3+px+q=(x^2+mx-1)(x-q)$，于是二次项、一次项系数即为方程

$$\begin{cases} q=m \\ p=-mq-1 \end{cases}$$

都用$m$表示也即$(m,p,q)=(m,-m^2-1,m)$。

- (2)利用次数关系可设$x^4+px^2+q=(x^2+mx+1)(ax^2+bx+c)$，对比四次、零次项系数发现只能$x^4+px^2+q=(x^2+mx+1)(x^2+bx+q)$，再考虑三次项发现$b=-m$，从而$x^4+px^2+q=(x^2+mx+1)(x^2-mx+q)$，二次项、一次项系数即为方程

$$\begin{cases} p=q+1-m^2 \\ 0=mq-m \end{cases}$$

讨论$m$是否为 0 可知$(m,p,q)$为$(0,q+1,q)$或$(m,2-m^2,1)$。

【作业 2】若$x^3+(1+t)x^2+2x+2u$与$x^3+tx+u$最大公因式为二次，求$t,u$。

解：左减右得到$(1+t)x^2+(2-t)x+u$，由最大公因式性质可知此与$x^3+tx+u$的最大公因式仍为原最大公因式。若$t=-1$, 这一定是一次多项式, 从而最大公因式不可能为二次。因此, 利用辗转相除法性质可知必然有

$$(1+t)x^2+(2-t)x+u \mid x^3+tx+u$$

先假设$u$非零，类似上方对比三次、零次项系数可得

$$((1+t)x^2+(2-t)x+u)\left(\frac{1}{1+t}x+1\right)=x^3+tx+u$$

由二次项、一次项系数得到方程

$$\begin{cases} \frac{2-t}{1+t}+1+t=0 \\ \frac{u}{1+t}+2-t=0 \end{cases}$$

直接解出$(t,u)$为$\left(\frac{-1+\sqrt{11}i}{2},-7-\sqrt{11}i\right)$或$\left(\frac{-1-\sqrt{11}i}{2},-7+\sqrt{11}i\right)$。

当 u 为零时，也即

$$(1+t)x^2+(2-t)x \mid x^3+tx$$

同除以 x 不影响整除性得到

$$(1+t)x+(2-t)|x^2+t$$

验证$2-t=0$时不满足条件，从而类似有

$$((1+t)x+(2-t))\left(\frac{x}{1+t}+\frac{t}{2-t}\right)=x^2+t$$

对比一次项系数得到方程

$$\frac{2-t}{1+t}+\frac{t(1+t)}{2-t}=0$$

这是三次方程，不过可尝试得到$t=-4$为根，从而分解为$(t+4)(t^2-t+1)$，最终解出 t 为$-4$或$\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

综合以上，$(t,u)$共有 5 个解：

$$\left(\frac{-1+\sqrt{11}i}{2},-7-\sqrt{11}i\right),$$

$$\left(\frac{-1-\sqrt{11}i}{2},-7+\sqrt{11}i\right),$$

$$(-4,0),$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2},0\right),$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2},0\right)$$

【作业3】若$f(x)$、$g(x)$不全为0，$u(x)f(x)+v(x)g(x)=\gcd(f(x),g(x))$，证$\gcd(u(x),v(x))=1$。

解：记$d(x)=\gcd(f(x),g(x))$，由条件其非零，从而由整除性$f_1(x)=\frac{f(x)}{d(x)}$与$g_1(x)=\frac{g(x)}{d(x)}$都为多项式。等式两侧同除以$d(x)$得到

$$f_1(x)u(x)+g_1(x)v(x)=1$$

若$m(x)$同时为$u(x)$、$v(x)$的因式，则其也为 1 的因式，从而只能为非零常数，因此

$$\gcd(u(x),v(x))=1$$

【作业4】化下列 Lambda 矩阵为标准形：

$$\begin{pmatrix} \lambda^2+\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$$

解:

法一（行列变换）:

$$\begin{pmatrix} \lambda^2+\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 & (\lambda+1)^2 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ (\lambda+1)^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$$

法二（行列式因子）:

1 阶子式公因式为 1，2 阶子式公因式为$\lambda(\lambda+1)$，3 阶子式行列式为$\lambda^2(\lambda+1)^3$，因此不变因子为$1, \lambda(\lambda+1), \lambda(\lambda+1)^2$，标准形即为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda+1) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$$

【作业 5】求下列 Lambda 矩阵的不变因子：

$$\begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

解: $\lambda+1, \lambda+2, \lambda-1, \lambda-2, 1$两两互素，可以沿对角线任意交换，因此不变因子为$1, 1, 1, (\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$

【作业 6】见上方定义 1.5.1 处讨论。

【作业 7】设

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 1 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

求$A^k$。

解：

$$N=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, N^2=O$$

$$\begin{aligned}A^k &= (\lambda I+N)^k\\ &= C_k^0\lambda^k + C_k^1\lambda^{k-1}N + \ldots + C_k^k N^k\\ &= \lambda^k + k\lambda^{k-1}N\\ &= \begin{pmatrix}\lambda^k & 0 & 0\\ k\lambda^{k-1} & \lambda^k & 0\\ 0 & 0 & \lambda^k\end{pmatrix}\end{aligned}$$

【作业 8】求下列矩阵的约当标准形：

- (1)

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

- (2)

$$\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 & 3\\ -2 & 6 & 0 & 13\\ 0 & -3 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

- (3)

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

解：

- (1)特征多项式

$$|\lambda I-A|=\det\begin{pmatrix}\lambda-1 & -2 & 0\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 2 & 2 & \lambda+1\end{pmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)$$

，特征值为 1、2、$-1$，均无重根，因此约当标准形即为对角阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- (2)特征多项式

$$f(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda^2 - 14\lambda + 19)$$

则$\lambda_1 = 1(2\text{重}), \lambda_2 = 7 + \sqrt{30}, \lambda_3 = 7 - \sqrt{30}$

对$\lambda_1 = 1(2\text{重})$，计算$(I - A)X = O$，解得

$$X = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

，因此几何重数为 2，等于代数重数，立得两个约当块均为(1)，则

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 + \sqrt{30} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 - \sqrt{30} \end{pmatrix}$$

- (3)特征多项式

$$|\lambda I - A| = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^n - 1$$

，其在复数域上分解为

$$(\lambda - \omega_1)(\lambda - \omega_2)\dots(\lambda - \omega_n)$$

，其中$\omega_k = e^{2k\pi\frac{i}{n}}(1 \le k \le n)$为$n$个不同的复数，因此在复数域上约当标准形为对角阵

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n \end{pmatrix}$$

## 1.7 补充练习

## 1.8 一些疑惑与解答

【Q1】$T(\lambda)(\lambda I-A)=(\lambda I-B)V_0$能否得出$T(\lambda)$为数阵？可是存在$T(\lambda)U(\lambda)=I$且$\deg T$和$\deg U$都不为 0 啊？

解：设$\deg T(\lambda)=m$可写为

$$T(\lambda)=T_0\lambda^m+T_1\lambda^{m-1}+...+T_m$$

其中$T_0,T_1,...,T_m$都是$n$阶数阵，且$T_0\neq O$，故

$$T(\lambda)(\lambda I-A)=T_0\lambda^{m+1}+(T_1-T_0A)\lambda^m+...+(-T_mA)$$

由于等式对任意λ成立，则$m=0$，从而$T(\lambda)=T_0$为数阵。

而设

$$V(\lambda)=V_0\lambda^n+V_1\lambda^{n-1}+...+V_n$$

，则

$$T(\lambda)V(\lambda)=T_0V_0\lambda^{n+m}+...$$

又$\deg T$和$\deg U$都不为 0，则$\lambda^i(i\neq 0)$系数均为 0，例如$T_0V_0=0$，也就解释了这些疑惑

【N1】这里卡住，因为看到$A^k$下意识想到写成$P^{-1}BP$

# 二 · 线性空间

## 2.1 域 F 上线性空间的基和维数

**定义 2.1.1**（线性空间）设$F$为域，$V$为非空集合，若在$V$上定义了加法与数乘两种运算，并且满足下列八条公理，则称$V$为域$F$上的线性空间（向量空间）。

1.加法交换律：对任意$u, v \in V$，有$u + v = v + u$；

2.加法结合律：对任意$u, v, w \in V$，有$(u + v) + w = u + (v + w)$；

3.存在加法单位元：存在$0 \in V$，使得对任意$u \in V$，有$u + 0 = 0 + u = u$；

4.存在加法逆元：对任意$u \in V$，存在$v \in V$，使得$u + v = 0$；

5.数乘结合律：对任意$a, b \in F$与$u \in V$，有$(ab)u = a(bu)$；

6.数乘分配律 1：对任意$a \in F$与$u, v \in V$，有$a(u + v) = au + av$；

7.数乘分配律 2：对任意$a, b \in F$与$u \in V$，有$(a + b)u = au + bu$；

8.数乘单位元：对任意$u \in V$，有$1u = u$，其中 1 为域 F 的乘法单位元。

下面我们讨论基坐标与坐标变换。

设域$F$上$n$维线性空间$V$，给定$V$的两个基$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$和$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$，设$V$中向量$v$分别在这两个基下的坐标为$X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$，$Y = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$，现在问$X, Y$之间的关系。

首先要把两个基联系起来，设$\beta_j = a_{1j}\alpha_1 + a_{2j}\alpha_2 + ... + a_{nj}\alpha_n (1 \le j \le n)$，则有

$$(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

把右边矩阵记作$A$，则

$$(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)A$$

那么有下列命题：

**命题 2.1.1**（坐标变换矩阵）设$V$为域$F$上$n$维线性空间，$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$是$V$的一个基，且向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$满足：$(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)A$，则$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$也是$V$的一个基的充分必要条件是矩阵$A$可逆。

证：两个基可依上面方法相互表出，易证。

下面回答$v$在不同基下坐标的关系。

已知

$$v = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)X$$
$$v = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)Y$$
$$(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)A$$

则有

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)X = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)Y$$

即

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)X = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)AY$$

由于$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$是可逆的，则有

$$X = AY$$

因此，

$$Y = A^{-1}X$$

## 2.2 子空间的交与和

**定义 2.2.1**（子空间）设$V$为域$F$上的线性空间，若$U$是$V$的一个非空子集，并且在$U$上定义的加法与数乘运算使得$U$本身也成为域$F$上的线性空间，则称$U$是线性空间$V$的一个子空间。

**定理 2.2.1**（子空间的充要条件）设$U$为域$F$上的线性空间$V$的一个非空子集，则$U$是$V$的一个子空间的充分必要条件是：对任意$u, v \in U$与$a \in F$，有$u + v \in U$与$au \in U$。

证：必要性显然，下证充分性：

显然加法交换，结合律，数乘结合，分配律，数乘单位元等公理都满足，下面验证加法单位元与加法逆元：只需对任意$u \in U$，验证$0u = 0$与$(-1)u = -u$，其中 0 为域 F 的加法单位元，因此得证。

因此，判断子空间只需验证：非空集，其对加法与数乘封闭即可。特别地，零子空间$\{0\}$与平凡子空间$V$都是$V$的子空间。

下面讨论有限维空间$V$及其子空间$U$的维数关系，显然，$\dim U \le \dim V$，$\dim U = \dim V$当且仅当$U = V$。

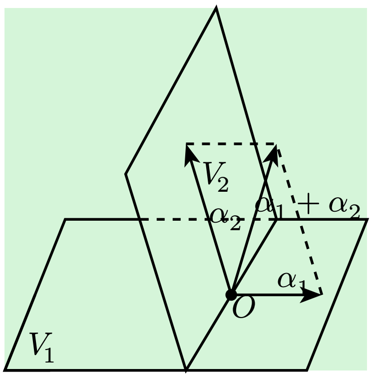
**定义 2.2.2**（张成的线性子空间）对于域$F$上线性空间$V$的一个向量组$\alpha_1, ..., \alpha_s$，包含它们的最小的子空间为$W = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_s\alpha_s \mid k_i \in F\}$，称为由$\alpha_1, ..., \alpha_s$张成的线性子空间，记作$< \alpha_1, ..., \alpha_s >$。

**定理 2.2.2**（子空间的交）设$V_1, V_2$为域$F$上线性空间$V$的两个子空间，则它们的交集$V_1 \cap V_2$也是$V$的一个子空间。

证：由于$V_1, V_2$都是子空间，因此$0 \in V_1$且$0 \in V_2$，从而$0 \in V_1 \cap V_2$，即非空。又对任意$u, v \in V_1 \cap V_2$与$a \in F$，由于$u, v \in V_1$且$V_1$为子空间，因此$u + v \in V_1$且$au \in V_1$，同理，$u + v \in V_2$且$au \in V_2$，从而$u + v \in V_1 \cap V_2$且$au \in V_1 \cap V_2$，因此由定理 2.2.1 知，$V_1 \cap V_2$为子空间。

证毕。

自然想到，子空间的并还是子空间吗？




如图所示，答案是否定的。

**定理 2.2.3**（子空间的和）设$V_1, V_2$为域$F$上线性空间$V$的两个子空间，则它们的和集$V_1 + V_2 = \{u + v \mid u \in V_1, v \in V_2\}$也是$V$的一个子空间。

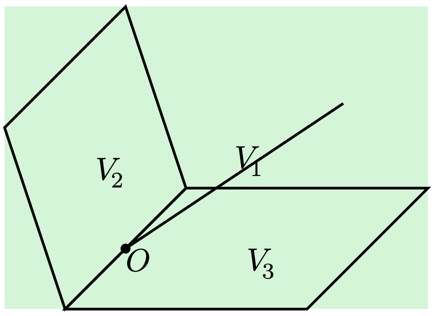
证：显然$0 = 0 + 0 \in V_1 + V_2$，因此非空。又对任意$u_1 + v_1, u_2 + v_2 \in V_1 + V_2$与$a \in F$，由于$u_1, u_2 \in V_1$且$V_1$为子空间，因此$u_1 + u_2 \in V_1$且$au_1 \in V_1$，同理，$v_1, v_2 \in V_2$且$V_2$为子空间，因此$v_1 + v_2 \in V_2$且$av_1 \in V_2$，从而$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \in V_1 + V_2$且$a(u_1 + v_1) = au_1 + av_1 \in V_1 + V_2$，因此由定理 2.2.1 知，$V_1 + V_2$为子空间。

**引理 2.2.1**（子空间交与和的另类分配律）设$V_1, V_2, V_3$为域$F$上线性空间$V$的三个子空间，则有：

$$V_1 \cap (V_2 + V_3) \supseteq (V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3)$$

$$V_1 + (V_2 \cap V_3) \subseteq (V_1 + V_2) \cap (V_1 + V_3)$$

证：先举例观察，如图。




由图，上述关系式显然。下面给出严格证明：

(1) 任取$\alpha + \beta \in (V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3)$，其中$\alpha \in V_1 \cap V_2$且$\beta \in V_1 \cap V_3$，则有$\alpha \in V_1$且$\alpha \in V_2$，以及$\beta \in V_1$且$\beta \in V_3$，故$\alpha + \beta \in V_1$且$\alpha + \beta \in V_2 + V_3$，因此$\alpha + \beta \in V_1 \cap (V_2 + V_3)$，从而$(V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3) \subseteq V_1 \cap (V_2 + V_3)$。

(2) 任取$\alpha+\beta\in V_1+(V_2\cap V_3)$，其中$\alpha\in V_1$且$\beta\in V_2\cap V_3$，则有$\beta\in V_2$且$\beta\in V_3$，因此$\alpha+\beta\in V_1+V_2$且$\alpha+\beta\in V_1+V_3$，从而$\alpha+\beta\in(V_1+V_2)\cap(V_1+V_3)$，因此$V_1+(V_2\cap V_3)\subseteq(V_1+V_2)\cap(V_1+V_3)$。

**引理 2.2.2**（子空间的和与基的关系）设$\alpha_1,...,\alpha_s$和$\beta_1,...,\beta_t$分别为线性空间$V$的两个向量组，$U_1=<\alpha_1,...,\alpha_s>,U_2=<\beta_1,...,\beta_t>$，则$U_1+U_2=<\alpha_1,...,\alpha_s,\beta_1,...,\beta_t>$。

证：任取$u_1+u_2\in U_1+U_2$，其中$u_1\in U_1,u_2\in U_2$，故$u_1=k_1\alpha_1+...+k_s\alpha_s,u_2=l_1\beta_1+...+l_t\beta_t$，因此$u_1+u_2=k_1\alpha_1+...+k_s\alpha_s+l_1\beta_1+...+l_t\beta_t\in<\alpha_1,...,\alpha_s,\beta_1,...,\beta_t>$，从而$U_1+U_2\subseteq<\alpha_1,...,\alpha_s,\beta_1,...,\beta_t>$。另一方面，任取$k_1\alpha_1+...+k_s\alpha_s+l_1\beta_1+...+l_t\beta_t\in<\alpha_1,...,\alpha_s,\beta_1,...,\beta_t>$，其中$k_i,l_j\in F$，则$k_1\alpha_1+...+k_s\alpha_s\in U_1$且$l_1\beta_1+...+l_t\beta_t\in U_2$，因此$k_1\alpha_1+...+k_s\alpha_s+l_1\beta_1+...+l_t\beta_t\in U_1+U_2$，从而$<\alpha_1,...,\alpha_s,\beta_1,...,\beta_t>\subseteq U_1+U_2$。

综上，$U_1+U_2=<\alpha_1,...,\alpha_s,\beta_1,...,\beta_t>$。

我们发现子空间的交与和似乎有不错的性质，研究空间当然离不开基，于是我们有下面的维数公式：

**定理 2.2.4**（子空间的维数公式）设$V_1,V_2$为域$F$上有限维线性空间$V$的两个子空间，则有：

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1\cap V_2)+\dim(V_1+V_2)$$

证：设$\dim V_1=n_1,\dim V_2=n_2,\dim(V_1\cap V_2)=m$，则$V_1\cap V_2$有一个基$\alpha_1,...,\alpha_m$，可以扩充为$V_1$的一个基$\alpha_1,...,\alpha_m,\gamma_{m+1},...,\gamma_{n_1}$，同样地，可以扩充为$V_2$的一个基$\alpha_1,...,\alpha_m,\beta_{m+1},...,\beta_{n_2}$，因此由引理 2.2.2 知，$V_1+V_2=<\alpha_1,...,\alpha_m,\gamma_{m+1},...,\gamma_{n_1},\beta_{m+1},...,\beta_{n_2}>$，因此只需证明这些向量线性无关即可。任取$k_1,...,k_m,l_{m+1},...,l_{n_1},r_{m+1},...,r_{n_2}\in F$使得$k_1\alpha_1+...+k_m\alpha_m+l_{m+1}\gamma_{m+1}+...+l_{n_1}\gamma_{n_1}+r_{m+1}\beta_{m+1}+...+r_{n_2}\beta_{n_2}=0$，则$k_1\alpha_1+...+k_m\alpha_m+l_{m+1}\gamma_{m+1}+...+l_{n_1}\gamma_{n_1}=-r_{m+1}\beta_{m+1}-...-r_{n_2}\beta_{n_2}$，左边向量属于$V_1$，右边向量属于$V_2$，因此它们都属于$V_1\cap V_2$，又由于$\alpha_1,...,\alpha_m$是$V_1\cap V_2$的一个基，因此存在$k_{m+1},...,k_{n_1}\in F$使得$l_{m+1}\gamma_{m+1}+...+l_{n_1}\gamma_{n_1}=-k_{m+1}\alpha_{m+1}-...-k_{n_1}\alpha_{n_1}$，由于$\alpha_1,...,\alpha_m,\gamma_{m+1},...,\gamma_{n_1}$是$V_1$的一个基，因此$l_{m+1}=...=l_{n_1}=0$，同样地，存在$r_1,...,r_m\in F$使得$r_{m+1}\beta_{m+1}+...+r_{n_2}\beta_{n_2}=-r_1\alpha_1-...-r_m\alpha_m$，由于$\alpha_1,...,\alpha_m,\beta_{m+1},...,\beta_{n_2}$是$V_2$的一个基，因此$r_{m+1}=...=r_{n_2}=0$，从而有$k_i=r_j=0(1\le i\le m,m+1\le j\le n_2)$，因此这些向量线性无关。

得证。

**推论 2.2.1**（直和的引入）设$V_1,V_2$都是域$F$上线性空间$V$的有限维子空间，则

$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2\Leftrightarrow V_1\cap V_2=0$$

**定义 2.2.3**（直和）设$V_1,V_2$是域$F$上线性空间$V$的两个子空间，若$V_1+V_2$中的每个向量$\alpha$都可以唯一表示为$\alpha_1+\alpha_2$，其中$\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2$，则称$V_1+V_2$为$V_1,V_2$的直和，记作$V_1\oplus V_2$。

**大定理 2.2.5**（直和的四大等价命题）设$V_1,V_2$是域$F$上线性空间$V$的两个子空间，则下列命题等价：

- (1)$V_1+V_2=V_1\oplus V_2$

- (2)$V_1 \cap V_2 = 0$
- (3)$V_1 + V_2$中 $\mathbf{0}$ 向量表法唯一
- (4)$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$
- (5)$V_1$的一个基与$V_2$的一个基的并是$V_1 + V_2$的一个基

证:

$(1) \Rightarrow (3)$ :由定义显然。

$(3) \Rightarrow (2)$ :任取$\alpha \in V_1 \cap V_2$，则$0 = \alpha + (-\alpha)$（线性空间定存在负元）而且$0 = 0 + 0$，根据直和定义，$\alpha = 0$，从而$V_1 \cap V_2 = 0$。

$(2) \Rightarrow (1)$ :任取$\alpha \in V_1 + V_2$，假设存在两种不同的表法$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$，其中$\alpha_1, \beta_1 \in V_1, \alpha_2, \beta_2 \in V_2$，则$\alpha_1 - \beta_1 = \beta_2 - \alpha_2 \in V_1 \cap V_2$，因此$\alpha_1 - \beta_1 = 0$且$\beta_2 - \alpha_2 = 0$，从而$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2$，这与假设矛盾，根据定义直和得证。

$(1) \Leftrightarrow (4)$ :由推论 2.2.1 立证。

$(4) \Rightarrow (5)$ :设$V_1, V_2$的基分别为$\alpha_1, ..., \alpha_{n_1}$和$\beta_1, ..., \beta_{n_2}$，则$\dim(V_1 + V_2) = n_1 + n_2$，又$V_1 + V_2 =< \alpha_1, ..., \alpha_{n_1}, \beta_1, ..., \beta_{n_2} >$，因此$\alpha_1, ..., \alpha_{n_1}, \beta_1, ..., \beta_{n_2}$线性无关，从而是$V_1 + V_2$的一个基。

$(5) \Rightarrow (4)$ :显然。

综上，五个命题等价。

定义 **2.2.4**（补空间）设$V_1, V_2$是域$F$上线性空间$V$的两个子空间，若$V = V_1 \oplus V_2$，则称$V_2(V_1)$是$V_1(V_2)$在$V$中的一个补空间。

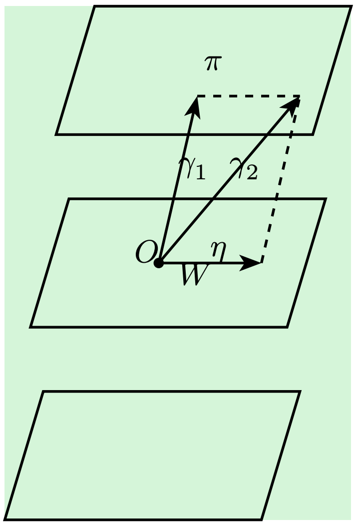
定理 **2.2.6**（补空间的存在性）设$V$是域$F$上的有限维线性空间，$U$是$V$的一个子空间，则存在$V$的一个子空间$W$使得$V = U \oplus W$（不唯一）。

证：设$U$的一个基为$\alpha_1, ..., \alpha_m$，则可以扩充为$V$的一个基$\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_{m+1}, ..., \beta_n$，因此由定理 2.2.5 知，$V = U \oplus < \beta_{m+1}, ..., \beta_n >$，因此$W =< \beta_{m+1}, ..., \beta_n >$是$U$的一个补空间。

以上我们的大定理 2.2.5 和定义 2.2.4 是基于有限维空间的，那么无限维空间的情况呢？事实上，也是成立的。证明过程类似，只是在取基时是任取一个有限子集。同样地，上述两个子空间可以用数学归纳法推广到多个子空间。证明过程类似，不再赘述。

## 2.3 商空间

事情要从如何建立$V$上的一个等价关系说起，设$V$为几何空间（以原点$O$为起点的所有向量组成的实线性空间），$W$为过原点的一个平面，则与$W$平行的所有平面（包括$W$）给出了几何空间$V$的一个划分，如图。




$\gamma_1, \gamma_2 \in \pi \Leftrightarrow \gamma_2 - \gamma_1 = \eta \in W$ 由此得到启发，为了在域$F$上线性空间$V$上建立一个等价关系，我们可以选定$V$的一个子空间$W$，对于任意$\alpha, \beta \in V$，定义：$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta \in W$，则这个关系是一个等价关系（自反，对称，传递均易证）。对于$\alpha \in V$，它的等价类

$$\begin{aligned}\overline{\alpha} &= \{\beta \mid \alpha \sim \beta\} \\ &= \{\beta \mid \beta - \alpha \in W\} \\ &= \{\alpha + \eta \mid \eta \in W\}\end{aligned}$$

记作

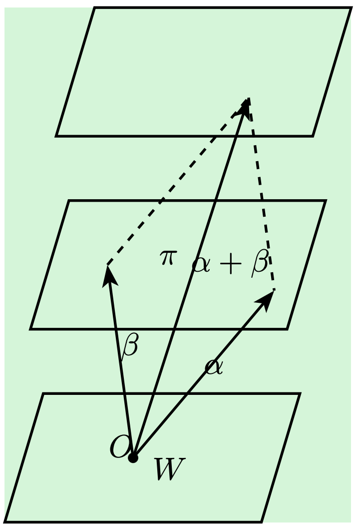
$$\alpha + W$$

称其为$W$的一个陪集。$\alpha$为$\alpha + W$的一个代表。

对于上述等价关系$\sim$，商集

$$V/W = \{\alpha + W \mid \alpha \in V\}$$

这里我们停下来粗略理解一下。结合上图，$\gamma_1 + W$实际上就是平面$\pi$，$\gamma_2 + W$也是如此，因此$\gamma_1 + W = \gamma_2 + W$,，它们都是$W$一个陪集$\pi$的代表。而商集$V/W$中的元素是与$W$平行（包括自身）的一个平面，例如$\pi$就是$V/W$中的一个元素。下面我们对商集$V/W$上的元素定义它们的加法与数乘运算。还是回到图形上找直觉。



容易想到，可以定义加法数乘如下：

$$(\alpha+W)+(\beta+W)=(\alpha+\beta)+W$$
$$k(\alpha+W)=(k\alpha)+W$$

容易验证这些运算满足线性空间的公理(其实借助图形便一目了然，包括代表元选取不影响上述的加法和数乘运算)。因此，我们有如下定义：

**定义 2.3.1**（商空间）$V/W$称作$V$对$W$的商空间。

那么，以上的商空间$V/W$究竟是几维的呢？

答案是一维。我个人理解是，商空间$V/W$中的元素是与$W$平行的一个平面，例如上图中的$\pi$，因此商空间$V/W$中的元素可以用$k\pi$来表示，其中$k$为一个数，因此可取商空间$V/W$的一个基$\pi$，因此是一维的。下面我们给出正式的证明：

**定理 2.3.1**（商空间维数公式）设$V$是域$F$上的一个有限维线性空间，$W$是$V$的一个子空间，则有：

$$\dim(V/W)=\dim V-\dim W$$

证：在$W$中取一个基$\alpha_1,...,\alpha_m$，可以扩充为$V$的一个基$\alpha_1,...,\alpha_m,\beta_{m+1},...,\beta_n$，则$\dim V=n,\dim W=m$。下面来找$V/W$的一个基，任取$\alpha\in V$，则存在唯一的$k_{m+1},...,k_n\in F$使得$\alpha=k_1\alpha_1+...+k_m\alpha_m+k_{m+1}\beta_{m+1}+...+k_n\beta_n$，因此$\alpha+W=k_{m+1}\beta_{m+1}+...+k_n\beta_n+W$，又由于$\beta_{m+1},...,\beta_n\notin W$，因此$k_{m+1}\beta_{m+1}+...+k_n\beta_n+W=k_{m+1}(\beta_{m+1}+W)+...+k_n(\beta_n+W)$，因此$V/W=<\beta_{m+1}+W,...,\beta_n+W>$，下面验证这些向量线性无关：任取$l_{m+1},...,l_n\in F$使得$l_{m+1}(\beta_{m+1}+W)+...+l_n(\beta_n+W)=0+W=W$，则$l_{m+1}\beta_{m+1}+...+l_n\beta_n\in W=<\alpha_1,...,\alpha_m>$，因此存在$l_1,...,l_m\in F$使得$l_1\alpha_1+...+l_m\alpha_m=l_{m+1}\beta_{m+1}+...+l_n\beta_n$，由于$\alpha_1,...,\alpha_m,\beta_{m+1},...,\beta_n$是一个基，因此$l_i=0(1\le i\le n)$，从而这些向量线性无关。

自然的，我们会想到$V,W$无限维，而$V/W$却是有限维的情况，下面我们给出一个例子：设$V$为数域$K$上的线性空间$K[x]$（一元多项式环），$W=\{k_nx^n+k_{n+1}x^{n+1}+...\mid k_i\in K\}$，由于$W$对加法数乘封闭，因此$W$是$K[x]$的一个子空间，且是无穷维的。显然$W$的一个基为$x^n,x^{n+1},...$，因此$K[x]/W$的任一元素$a_0+a_1x+...+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+...+W=a_0(1+W)+...+a_{n-1}(x^{n-1}+W)$。假设$k_0,...,k_{n-1}\in K$使得$k_0(1+W)+...+k_{n-1}(x^{n-1}+W)=0+W=W$，则$k_i=0$。因此$K[x]/W=<1+W,x+W,...,x^{n-1}+W>$，$K[x]/W$是$n$维的。故而有如下定义：

**定义 2.3.2**（余维数）$V$为线性空间，$W$为$V$的子空间，若$V/W$是有限维的，则称$\dim(V/W)$为$W$在$V$中的余维数，记作$codim_VW$

下面我们研究标准映射：

**定义 2.3.3**（标准映射）设$V$是域$F$上的线性空间，$W$是$V$的一个子空间，则存在一个自然的线性映射$\pi:V\to V/W$，使得$\pi(x)=x+W$，称$\pi$为从$V$到$V/W$的标准映射。

显然，标准映射$\pi$是一个满射，当$W \neq O$时，$\pi$不是单射，商空间$V/W$的一个元素$\alpha + W$在$\pi$的原像集是$\alpha + W$，这是因为：

$$\beta \in \pi^{-1}(\alpha + W) \Leftrightarrow \beta + W = \alpha + W \Leftrightarrow \beta \in \alpha + W$$

进一步地，我们不难验证$\pi$保持我们在$V/W$上定义的加法和数乘：

$$\pi(\alpha_1 + \alpha_2) = \pi(\alpha_1) + \pi(\alpha_2)$$

$$\pi(k\alpha) = k\pi(\alpha)$$

这启发我们可以利用$V/W$的结构研究$V$的结构。

有了定理 2.3.1 和$\pi$，我们就可以利用商空间对维数归纳来研究原空间了。我们举定理 2.2.6 证明为例。

**引理 2.3.1**（$\pi$的一个性质）$\pi$把$V$中线性相关的向量集映射成$V/W$中线性相关的向量集。

证：任取$\alpha_1, ..., \alpha_n \in V$使得它们线性相关，则存在不全为 0 的$k_1, ..., k_n \in F$使得$k_1\alpha_1 + ... + k_n\alpha_n = 0$，因此$k_1\pi(\alpha_1) + ... + k_n\pi(\alpha_n) = k_1(\alpha_1 + W) + ... + k_n(\alpha_n + W) = (k_1\alpha_1 + ... + k_n\alpha_n) + W = 0 + W = W$，因此$\pi(\alpha_1), ..., \pi(\alpha_n)$线性相关。

插一句题外话，这里如果还用我们上面那个经典的图形来理解的话就有所局限了，因为我们举得那个例子中$\dim(V/W) = 1$，因此用于辅助理解这个引理不太合适。

下面我们利用引理 2.3.1 证明定理 2.2.6：

证：考虑商空间$V/W$，设它的一个基为$S' = \{\alpha_i + W \mid \alpha_i \in V, i \in I\}$则$S = \{\alpha_i \mid i \in I\}$是$V$中线性无关的向量集，设$U = \langle \alpha_{i1}, ..., \alpha_{ir} \rangle$，下证$U$是$W$在$V$中的补空间。任取$\alpha \in V$，则存在$k_1, ..., k_r \in F$使得$\pi(\alpha) = k_1(\alpha_{i1} + W) + ... + k_r(\alpha_{ir} + W)$，因此$\pi(\alpha - k_1\alpha_{i1} - ... - k_r\alpha_{ir}) = 0 + W = W$，因此$\alpha - k_1\alpha_{i1} - ... - k_r\alpha_{ir} \in W$，从而$\alpha = (\alpha - k_1\alpha_{i1} - ... - k_r\alpha_{ir}) + (k_1\alpha_{i1} + ... + k_r\alpha_{ir}) \in U + W$，又任取$\beta \in U \cap W$，则$W = \beta + W = \sum_{s=1}^{r} k_i\alpha_{is} + W = \sum_{s=1}^{r} k_i(\alpha_{is} + W)$，因此$k_i = 0$，从而$\beta = 0$，因此$U \cap W = \{0\}$，故而$V = U \oplus W$。

## 2.4 域 F 上线性空间的同构

**定义 2.4.1**（同构）设$V, V'$是域$F$上的线性空间，若存在一个双射$\sigma: V \to V'$使得对任意$x, y \in V, k \in F$有：

$$\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y)$$

$$\sigma(kx) = k\sigma(x)$$

则称$\sigma$为从$V$到$V'$的同构映射，称$V, V'$同构，记作$V \cong V'$

**定理 2.4.1**（同构映射$\sigma$的性质）

- (1)$\sigma(0) = 0'$是$V'$中的 0 元
- (2)$\sigma(-x) = -\sigma(x)$

- (3)$\alpha_1,...,\alpha_n\in V$线性相关$\Leftrightarrow \sigma(\alpha_1),...,\sigma(\alpha_n)\in V'$线性相关
- (4)$\sigma$把$V$中的一个基映射成$V'$中的一个基

证：显然，略。

**定理 2.4.2**（同构空间的充要条件）域$F$上两个有限维线性空间$V\cong V'\Leftrightarrow \dim V=\dim V'$

证：必要性显然，下面证明充分性。设$\dim V=\dim V'=n$，则$V,V'$的一个基分别为$\alpha_1,...,\alpha_n$和$\beta_1,...,\beta_n$，定义$\sigma:V\to V'$使得对任意$k_1,...,k_n\in F$有：

$$\sigma(k_1\alpha_1+...+k_n\alpha_n)=k_1\beta_1+...+k_n\beta_n$$

则容易验证$\sigma$是双射且保持加法和数乘，因此是同构映射。

证毕。

从以上证明中，我们可以得出一个结论：若$\sigma$是域$F$上两个有限维线性空间$V,V'$之间的同构映射，则$V$中向量$\alpha$在基$\alpha_1,...,\alpha_n$下的坐标与$V'$中向量$\sigma(\alpha)$在基$\beta_1,...,\beta_n$下的坐标相同。同时，今后我们在研究线性空间时，可以把一个线性空间同构到一个熟悉的线性空间上，例如$K^n$，从而利用熟悉的线性空间的结构来研究原空间的结构。

下面研究子空间的同构：

**定理 2.4.3**（子空间的同构）设$\sigma$是域$F$上两个线性空间$V,V'$之间的同构映射，若$U$是$V$的一个子空间，则$\sigma(U)$是$V'$的一个子空间；若$U$是有限维的，则$\dim U=\dim\sigma(U)$。

证：任取$u_1,u_2\in\sigma(U),k\in F$，则存在$\alpha_1,\alpha_2\in U$使得$\sigma(\alpha_1)=u_1,\sigma(\alpha_2)=u_2$，因此$u_1+u_2=\sigma(\alpha_1)+\sigma(\alpha_2)=\sigma(\alpha_1+\alpha_2)$且$ku_1=k\sigma(\alpha_1)=\sigma(k\alpha_1)$，因此$u_1+u_2,ku_1\in\sigma(U)$，从而$\sigma(U)$是$V'$的一个子空间。设$\dim U=m$，则$U$的一个基为$\alpha_1,...,\alpha_m$，则$\sigma(U)=\langle\sigma(\alpha_1),...,\sigma(\alpha_m)\rangle$，下面验证这些向量线性无关：任取$k_1,...,k_m\in F$使得$k_1\sigma(\alpha_1)+...+k_m\sigma(\alpha_m)=0'$，则$\sigma(k_1\alpha_1+...+k_m\alpha_m)=0'$，由于$\sigma$是单射，因此$k_i=0(1\le i\le m)$，从而这些向量线性无关。

证毕。

容易证明，同构是一个等价关系，维数完全决定了同构类。

## 2.5 作业

### zyf 班作业

【作业 1】在$K^4$中，求基

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

到基

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\\0\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

的过渡矩阵及$\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$在基$\beta_i$下的坐标。

解：设过渡矩阵$A$，则

$$(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3\ \ \beta_4)=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4)A$$

，即

$$\begin{pmatrix}1&2&3&0\\1&3&1&1\\-1&1&-2&-1\\1&1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}A$$

，解得

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\1&3&1&1\\-1&1&-2&-1\\1&1&0&2\end{pmatrix}$$

且

$$Y=A^{-1}X=\begin{pmatrix}-13&17&-11&-14\\1&-1&1&1\\4&-5&3&4\\6&-8&5&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

【作业 2】在数域$K$上的线性空间$K[x]_n$中，求基

$$\alpha_1=1,\alpha_2=x,\alpha_3=x^2,...,\alpha_n=x^{n-1}$$

到基

$$\beta_1=1,\beta_2=x-a,\beta_3=(x-a)^2,...,\beta_n=(x-a)^{n-1}$$

的过渡矩阵,其中$a$为$K$中任一非 0 常数。

解：由

$$(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)A$$

可设

$$(1,x-a,(x-a)^2,...,(x-a)^{n-1})=(1,x,x^2,...,x^{n-1})(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n)$$

且

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \\ \vdots \\ y_{ni} \end{pmatrix}$$

$\gamma_i$相当于$(x-a)^{i-1}$的二项式系数，由此可得过渡矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 & \dots & (-a)^{n-1} \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 & \dots & (-1)^{n-2}(n-1)a^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -3a & \dots & (-1)^{n-3}C_{n-1}^{2}a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

【作业 3】

- (1)证明：在$K[x]_n$，多项式组

$$f_i(x) = (x-a_1)\dots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\dots(x-a_n), i = 1, 2, \dots, n$$

是$K[x]_n$的一个基，其中$a_1, a_2, \dots, a_n$为$K$中互不相同的$n$个常数。

- (2)在(1)中，取$K$为复数域$\mathbb{C}$，且取$a_1 \sim a_n$为全体$n$次单位根$1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{n-1}$，其中$\xi = e^{i\frac{2\pi}{n}}$，求由基$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = x, \alpha_3 = x^2, \dots, \alpha_n = x^{n-1}$到基$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$的过渡矩阵。

解：

- (1)只需证明$f_i(x)$线性无关即可，设

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

，则对任意$1 \le j \le n$，取$x = a_j$，有

$$c_j f_j(a_j) = 0$$

，由于$f_j(a_j) \neq 0$，则$c_j = 0$，因此$f_i(x)$线性无关，从而是基。

- (2)由

$$(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A$$

可设

$$(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) = (1, x, x^2, \dots, x^{n-1})(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$$

且

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \\ \vdots \\ y_{ni} \end{pmatrix}$$

$\gamma_i$相当于$f_i(x)$的系数，由此可得过渡矩阵

$$A = (\gamma_1 \ \ \gamma_2 \ \ \dots \ \ \gamma_n)$$

且

$$(1, x, x^2, \dots, x^{n-1})\gamma_i = f_i(x) = \frac{x^n - 1}{x - \xi^{i-1}} = x^{n-1} + \xi^{i-1}x^{n-2} + \xi^{2(i-1)}x^{n-3} + \dots + \xi^{(i-1)(n-1)}$$

故

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} \xi^{(i-1)(n-1)} \\ \dots \\ \xi^{2(i-1)} \\ \xi^{i-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

因此过渡矩阵

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \xi^{n-1} & \xi^{2(n-1)} & \dots & \xi^{(n-1)(n-1)} \\ 1 & \xi^{n-2} & \xi^{2(n-2)} & \dots & \xi^{(n-1)(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \xi & \xi^2 & \dots & \xi^{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

【作业 4】在$K^4$中，$V_1 = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle, V_2 = \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

分别求$V_1 \cap V_2$和$V_1 + V_2$的一个基和维数。

解：设$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\beta_1 + k_5\beta_2 = 0$，

即

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -3 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

通过行变换得到简化行阶梯矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可得

$$\alpha_3 = -2\alpha_1 + \alpha_2$$
$$\beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - \beta_1$$

且

$$\dim V_1 = 2, \dim V_2 = 2, \dim(V_1 + V_2) = 3, \dim(V_1 \cap V_2) = 1$$

并且各自的一个基

$$V_1 = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle, V_2 = \langle \beta_1, \beta_2 \rangle, V_1 + V_2 = \langle \alpha_1, \alpha_2, \beta_1 \rangle$$

且

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 \in V_1 \cap V_2$$

故

$$V_1 \cap V_2 = \langle \alpha_1 + 2\alpha_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

【作业 5】设$A, B$分别是域$F$上$s \times n, m \times n$矩阵，证明：$n$元齐次线性方程组$AX = 0$的解集$W_1$与$BX = 0$的解集$W_2$相同当且仅当$A, B$行向量组等价。

证：设$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}, W = \left\{ x \mid \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = 0 \right\}$

必要性：若$W_1 = W_2$，则$W = W_1 = W_2$，那么$rankA = rank\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$又$\langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s \rangle \subseteq \langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_m \rangle$,故$\langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s \rangle = \langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_m \rangle$,故$B$的行向量组可以被$A$的行向量组线性表出，反之同理，因此$A, B$行向量组等价。

充分性:若$A, B$行向量组等价,则$\langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s \rangle = \langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_m \rangle$,故$B$的行向量组可以被$A$的行向量组线性表出,反之同理,因此$rankA = rank\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, $\dim W = \dim W_1$又$W = W_1 \cap W_2$，因此$W = W_1 = W_2$。

【作业 6】设$W$是域$F$上$n$维线性空间$V$的一个非平凡子空间，$W$中取一个基$\delta_1, ..., \delta_m$。用两种方式把它扩展成$V$的一个基：

$$\delta_1, ...\delta_m, \alpha_{m+1}, ..., \alpha_n$$
$$\delta_1, ...\delta_m, \beta_{m+1}, ..., \beta_n$$

设$\delta_1, ...\delta_m, \alpha_{m+1}, ..., \alpha_n$到$\delta_1, ...\delta_m, \beta_{m+1}, ..., \beta_n$的过渡矩阵为$P$，求商空间$V/W$的基$\alpha_{m+1} + W, ..., \alpha_n + W$到基$\beta_{m+1} + W, ..., \beta_n + W$的过渡矩阵。

解：由题得

$$(\delta_1 \ \dots \ \delta_m \ \beta_{m+1} \ \dots \ \beta_n) = (\delta_1 \ \dots \ \delta_m \ \alpha_{m+1} \ \dots \ \alpha_n)P$$

，因此若设$P = \begin{pmatrix} I_m & Q \\ 0 & P' \end{pmatrix}$，其中$P'$是$(n-m) \times (n-m)$矩阵，有

$$\beta_i=\sum_{j=1}^{m}p_{ji}\delta_j+\sum_{j=m+1}^{n}p'_{j-m,i}\alpha_j$$

，其中$p'_{j-m,i}$是$P'$的第$(j-m)$行第$i$列元素。因此

$$\beta_i+W=\sum_{j=m+1}^{n}p'_{j-m,i}\alpha_j+W=\sum_{j=m+1}^{n}p'_{j-m,i}(\alpha_j+W)$$

，因此过渡矩阵为$P'$。

【作业 7】设$A$是数域$K$上的$2\times3$矩阵，$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}$

- (1)求$AX=O$解空间$W$的一个基
- (2)求$K^3/W$的一个基和维数

解:

- (1)设$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则$\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=0\\x_1-x_3=0\end{cases}$，解得$x_1=x_3,x_2=3x_3$，因此解空间$W$的一个基为$\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$
- (2)$\dim(K^3/W)=\dim K^3-\dim W=3-1=2$，且可取$K^3/W=\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+W,\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+W\rangle$是$K^3/W$的一个基。

【作业 8】对于正整数$n$，令

$$Q\left(\sqrt[n]{3}\right)=\left\{a_0+a_1\sqrt[n]{3}+...+a_{n-1}\sqrt[n]{3^{n-1}}\mid a_i\in\mathbb{Q},i=0,1,...,n-1\right\}$$

设$n,m$是不同的正整数，试问$\mathbb{Q}$上的线性空间$Q\left(\sqrt[n]{3}\right)$与$Q\left(\sqrt[m]{3}\right)$是否同构？

解：设$Q\left(\sqrt[n]{3}\right)$的一个基为$1,\sqrt[n]{3},...,\sqrt[n]{3^{n-1}}$，则$\dim Q\left(\sqrt[n]{3}\right)=n$；同理可得$\dim Q\left(\sqrt[m]{3}\right)=m$，由于$n,m$不同，因此$Q\left(\sqrt[n]{3}\right),Q\left(\sqrt[m]{3}\right)$不可能同构。

【作业9】对于复数域上的$n$级循环移位矩阵$A=(\varepsilon_n\ \ \varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \cdots\ \ \varepsilon_{n-1})$，求$C(A)$的维数和一个基，其中$\varepsilon_i=e^{i\frac{2\pi}{n}}$。

【作业 10】设$A,B$都是$n$级实对称矩阵，证明：若$A,B$有相同的特征多项式，那么存在$\mathbb{R}^n$到自身的一个同构映射$\sigma$使得

$$\sigma(\alpha)^TB\sigma(\alpha)=\alpha^TA\alpha$$

对所有$\alpha\in\mathbb{R}^n$成立。

证:

1.由上学期的实对称矩阵的正交相似对角化定理（实对称矩阵必然可正交相似对角化）得存在正交矩阵$Q_1,Q_2$使得

$$Q_1^TAQ_1=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}Q_2^TBQ_2=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

，其中$\lambda_i$是$A,B$的特征值。

2.而$A,B$有相同的特征多项式，因此它们的特征值相同，即$\lambda_i$相同。于是$Q_1^TAQ_1=Q_2^TBQ_2$，因此$A=Q_1Q_2^TBQ_2Q_1^T$，设$R=Q_2Q_1^T$，则$R$是一个正交矩阵，因此是一个同构映射，且对任意$\alpha\in\mathbb{R}^n$有

$$\sigma(\alpha)^TB\sigma(\alpha)=\alpha^TR^TBR\alpha=\alpha^TA\alpha$$

## dyw 班作业

【作业 1】令$\infty,-\infty$表示两个不同的对象，他们均不在$\mathbb{R}$中，在$\mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$中定义加法和数乘：两个实数的加法和数乘与在$\mathbb{R}$中定义的相同；对于任意实数$t$，定义

$$t\infty=\begin{cases}\infty & 若t>0\\ -\infty & 若t<0\\ 0 & 若t=0\end{cases}$$

$$t(-\infty)=\begin{cases}-\infty & 若t>0\\ \infty & 若t<0\\ 0 & 若t=0\end{cases}$$

以及

$$\begin{gathered}t+\infty=\infty+t=\infty+\infty=\infty,\\ t+(-\infty)=(-\infty)+t=-\infty+(-\infty)=-\infty,\\ \infty+(-\infty)=(-\infty)+\infty=0\end{gathered}$$

问：$\mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$是域$\mathbb{R}$上的一个线性空间吗？

解：只需看是否满足线性空间的八条公理

- (1)加法交换律：满足
- (2)加法结合律：不满足，例如

$$(\infty+(-\infty))+t=0+t=t$$

但

$$\infty+((-\infty)+t)=\infty+(-\infty)=-\infty$$

因此$\mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$不是域$\mathbb{R}$上的一个线性空间。

【作业 2】证明或给出反例：若$v_1,v_2,...,v_m$和$w_1,w_2,...,w_m$是$V$中的两个线性无关的向量组，那么$v_1+w_1,v_2+w_2,...,v_m+w_m$也是$V$中的一个线性无关的向量组。

解：反例：设$V=\mathbb{R}^2$，则

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},w_1=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},w_2=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

是$V$中的两个线性无关的向量组，但$v_1 + w_1, v_2 + w_2$是$V$中的一个线性相关的向量组。

【作业 3】设$v_1, v_2, .., v_m$是$V$中的一组向量，令$w_i = v_1 + v_2 + ... + v_i, i \in \{1, 2, ..., m\}$，证明：$w_1, w_2, ..., w_m$线性无关当且仅当$v_1, v_2, ..., v_m$线性无关。

证：令$k_1 w_1 + k_2 w_2 + ... + k_m w_m = 0$，即$k_1(v_1) + k_2(v_1 + v_2) + ... + k_m(v_1 + v_2 + ... + v_m) = 0$，整理得$(k_1 + k_2 + ... + k_m)v_1 + (k_2 + k_3 + ... + k_m)v_2 + ... + (k_m)v_m = 0$。则$v_1, v_2, ..., v_m$线性无关当且仅当$k_1 + k_2 + ... + k_m = 0, k_2 + k_3 + ... + k_m = 0, ..., k_m = 0$，等价于$k_1 = k_2 = ... = k_m = 0$，等价于$w_1, w_2, ..., w_m$线性无关。

证毕。

【作业 4】设$U, W_1, W_2$都是域$F$上的线性空间$V$的子空间，证明：$(U + W_1) \cap (U + W_2) = U + (U + W_1) \cap W_2$

证：任取$\alpha \in (U + W_1) \cap (U + W_2)$，则$\alpha = u_1 + w_1 = u_2 + w_2$，其中$u_1, u_2 \in U, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$。则$w_2 = (u_1 - u_2) + w_1 \in (U + W_1)$，又$w_2 \in W_2$，所以$w_2 \in (U + W_1) \cap W_2$。因此$\alpha = u_2 + w_2 \in U + (U + W_1) \cap W_2$。故而

$$(U + W_1) \cap (U + W_2) \subseteq U + (U + W_1) \cap W_2$$

。反之，任取$\alpha \in U + (U + W_1) \cap W_2$，则$\alpha = u + w$，其中$u \in U, w \in (U + W_1) \cap W_2$，因此$u + w \in U + W_1$且$u + w \in U + W_2$，因此$\alpha \in (U + W_1) \cap (U + W_2)$，从而

$$U + (U + W_1) \cap W_2 \subseteq (U + W_1) \cap (U + W_2)$$

综上，$(U + W_1) \cap (U + W_2) = U + (U + W_1) \cap W_2$

【作业 5】设$V$是数域$K$上的$n$维线性空间，$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$是$V$的一组基。令

$$V_1 = \langle \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \rangle$$

$$V_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i \mid \sum_{i=1}^{n} k_i = 0, i = 1, 2, ..., n \right\}$$

证明：

- (1)$V_2$是$V$的一个子空间
- (2)$V = V_1 \oplus V_2$

证：

- (1)任取$\alpha, \beta \in V_2, k \in K$，则存在$k_1, ..., k_n, l_1, ..., l_n \in K$使得$\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i, \beta = \sum_{i=1}^{n} l_i \alpha_i$且$\sum_{i=1}^{n} k_i = 0, \sum_{i=1}^{n} l_i = 0$，因此$\alpha + \beta = \sum_{i=1}^{n} (k_i + l_i)\alpha_i$且$\sum_{i=1}^{n} (k_i + l_i) = 0$，又$k\alpha = \sum_{i=1}^{n} (kk_i)\alpha_i$且$\sum_{i=1}^{n} (kk_i) = 0$，因此$\alpha + \beta, k\alpha \in V_2$，从而$V_2$是线性空间。又$V_2 \subseteq \langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \rangle$，因此$V_2$是$V$的一个子空间。

- (2)设$\alpha \in V_1 \cap V_2$，则$\alpha = t(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)$，又$\alpha \in V_2$，故$\sum_{i=1}^{n} t = 0$，因此$t = 0$，从而$\alpha = 0$，因此$V_1 \cap V_2 = \{0\}$，因此$V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$，且$V_1, V_2$都是$V$的子空间，并且任取$\alpha \in V$，则存在$k_1, ..., k_n \in K$使得$\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i$，又$\sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{n} \times n$，因此
$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{n}(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n) + \left(\sum_{i=1}^{n}\left(k_i - \frac{\sum_{j=1}^{n} k_j}{n}\right)\alpha_i\right) \in V_1 + V_2$$
则$V \subseteq V_1 + V_2$。又$V_1 + V_2 \in \langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \rangle = V$，故
$$V = V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$$

证毕。

【作业 6】设$V = R[x]$，令$W = \{(x^2 + 1)h(x) \mid h(x) \in R[x]\}$，证明：
- (1)$W$是$V$的一个子空间。
- (2)商空间$V/W$的元素是什么？求$V/W$的一个基和维数。

证：

- (1)任取$\alpha, \beta \in W, k \in K$，则存在$h_1(x), h_2(x) \in R[x]$使得$\alpha = (x^2 + 1)h_1(x), \beta = (x^2 + 1)h_2(x)$，因此$\alpha + \beta = (x^2 + 1)(h_1(x) + h_2(x))$，又$k\alpha = k(x^2 + 1)h_1(x) = (x^2 + 1)(kh_1(x))$，因此$\alpha + \beta, k\alpha \in W$，从而$W$是线性空间。又$W \subseteq V$，因此$W$是$V$的一个子空间。
- (2)商空间$V/W$的元素是$f(x) + W$。作带余除法：任取$f(x) \in V$，则存在$q(x), r(x) \in R[x]$使得$f(x) = (x^2 + 1)q(x) + r(x)$，其中$\deg(r) < 2$或$r(x) = 0$。因此$f(x) + W = r(x) + W$，即商空间中的每个元素都可以表示为$r(x) + W$的形式。由于$\{1, x\}$是$r(x)$的基，因此$\{1 + W, x + W\}$是商空间$V/W$的一个基，维数为 2。

## 2.6 补充练习

## 2.7 一些疑惑与解答

【N1】逆矩阵的求法

解：
- 法一（初等行变换法）：将矩阵$A$与单位矩阵$I$并排组成增广矩阵$(A|I)$，然后通过初等行变换将左边的$A$化为$(I|A^{-1})$

$$(A|I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -13 & 17 & -11 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & -8 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

- 法二（伴随矩阵法）：计算矩阵$A$的伴随矩阵$A^\star$，然后利用公式

$$A^{-1} = \frac{A^\star}{\det(A)}$$

  求出逆矩阵。伴随矩阵$A^\star$的第$i$行$j$列元素为$(-1)^{i+j}$乘以矩阵$A$去掉第$j$行第$i$列后所得到的子矩阵的行列式。

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

$$(A^\star)^T=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix}3&1&1\\1&-2&-1\\1&0&2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&-2&-1\\1&0&2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&3&1\\-1&1&-1\\1&1&2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&3&1\\-1&1&-2\\1&1&0\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}2&3&0\\1&-2&-1\\1&0&2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&3&0\\-1&-2&-1\\1&0&2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2&0\\-1&1&-1\\1&1&2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&2&3\\-1&1&-2\\1&1&0\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}2&3&0\\3&1&1\\1&0&2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&3&0\\1&1&1\\1&0&2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&2&0\\1&3&1\\1&1&2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2&3\\1&3&1\\1&1&0\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}2&3&0\\3&1&1\\1&-2&-1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&3&0\\1&1&1\\-1&-2&-1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2&0\\1&3&1\\-1&1&-1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&2&3\\1&3&1\\-1&1&-2\end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-13&1&4&6\\17&-1&-5&-8\\-11&1&3&5\\-14&1&4&7\end{pmatrix}$$

则

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-13&17&-11&-14\\1&-1&1&1\\4&-5&3&4\\6&-8&5&7\end{pmatrix}$$

【N2】这里思路一定要清晰，目的是求$f_i(x)$的系数，所以要把$f_i(x)$写成$(1,x,x^2,...,x^{n-1})\gamma_i$的形式，然后比较系数得到$\gamma_i$，从而得到过渡矩阵。

【N3】$V_1+V_2$的简化行阶梯矩阵为何能看出$V_1,V_2,V_1+V_2$的基与维数？

解：以作业 4 为例，设$V_1=\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle,V_2=\langle\beta_1,\beta_2\rangle$ 若研究$V_1$的基，只需令

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$$

即

$$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\text{（记作}AK=O\text{）}$$

若乘开则发现式子之间的线性组合相当于系数矩阵做行变换，因此把$V_1,V_2$的基拼成一个大矩阵做行变换可以同时看出$V_1,V_2,V_1+V_2$的基与维数。

下面我们说明为何能看出$V_1,V_2,V_1+V_2$的基与维数。

这也是为什么我们要化成简化行阶梯矩阵，例如，上述的$A$简化行阶梯矩阵$\begin{pmatrix}b_1&0&\lambda b_1\\0&b_2&\mu b_2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$乘开得

$$k_1 b_1 + \lambda k_3 b_1 = 0$$

取$k_1 = \lambda, k_3 = -1$，对$\mu$同理，得

$$\alpha_3 = \lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2$$

据此法，一定能找出$V_1, V_2, V_1 + V_2$的极大线性无关组（基）以及维数。

【N4】注意这里的0是商空间$V/W$中的零向量，即$0 + W = W$，而不是线性空间$V$中的零向量。

【N5】这里我个人理解是$\alpha + W$为终点在这个平面，起点在原点的所有向量的集合，但原书似乎理解成这些向量终点所构成的平面，这两种理解是等价的。可举下例：取$V = \mathbb{R}^3, W = \{\langle x, y, 0\rangle\}$取$\alpha = (a, b, c)$，则$\alpha + W = \{\langle x, y, c\rangle \mid x, y \in \mathbb{R}\}$，因此$\alpha + W$为平面$z = c$。

【N6】这里我最开始误认为$P = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix}$，但实际上由于

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{m} p_{ji}\delta_j + \sum_{j=m+1}^{n} p'_{j-m,i}\alpha_j$$

$p_{ji}$大多数情况下不为0，因此$P$的形式应该是$P = \begin{pmatrix} I_m & Q \\ 0 & P' \end{pmatrix}$，其中$Q$是一个$m \times (n-m)$矩阵。

【N7】证明：设$A$是$n$级实对称矩阵，则存在一个正交矩阵$P$使得$P^T AP$是一个对角矩阵。

证：对$n$做归纳：

1. 当$n = 1$时，结论显然成立。

2. 假设对$n-1$级实对称矩阵结论成立，现在考虑$n$级实对称矩阵$A$。

   I. 特征值为实数：设$\lambda$是$A$的一个特征值，$x$是对应的一个特征向量，则$Ax = \lambda x$，取共轭转置得$\overline{x}^T A = \overline{\lambda}\overline{x}^T$，因此$\overline{x}^T Ax = \overline{\lambda}\overline{x}^T x$，又$\overline{x}^T Ax = \lambda\overline{x}^T x$，因此$\lambda = \overline{\lambda}$，即$\lambda$为实数。

   II. 构造正交补空间：设$W = \langle x\rangle$，则$W$是$A$的一个特征子空间，设$U = \{y \mid y \in \mathbb{R}^n, y^T x = 0\}$，则$U$是$W$在$\mathbb{R}^n$中的一个补空间，且对任意$y \in U$，有$(Ay)^T x = y^T Ax = \lambda y^T x = 0$，因此$Ay \in U$，即$U$是$A$的不变子空间。

# 三 · 线性映射

## 3.1 线性映射及其运算

定义 **3.1.1**（线性映射）设$V,V'$是域$F$上两个线性空间，若映射$A:V\to V'$满足：对任意$\alpha,\beta\in V,t\in F$，有$A(\alpha+\beta)=A(\alpha)+A(\beta),A(t\alpha)=tA(\alpha)$，则称$A$是从$V$到$V'$的一个线性映射。若$V=V'$，则称$A$是$V$上的一个线性映射。$A(\alpha)$也可写作$A\alpha$

定理 **3.1.1**（线性映射的存在性）设$V,V'$是域$F$上两个线性空间，且$\dim V<\infty$。$V$中取一个基$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$，$V'$中任意取定$\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$（可以相同），令

$$A:V\to V'$$
$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i\mapsto\sum_{i=1}^{n}k_i\beta_i$$

则$A$是从$V$到$V'$的一个线性映射，且满足$A\alpha_i=\beta_i,i=1,2,...,n$。

证：由于$\alpha$表示成$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$的线性组合的方式唯一，因此$A$是一个映射。又容易验证$A$保持加法和数乘，因此$A$是一个线性映射。

同时，由于$A$完全被它在$V$上的一组基上的值所确定，因此$A$是唯一的。

定理 **3.1.2**（投影）设$V$是域$F$上一个线性空间，$U,W$是$V$的两个子空间，且$V=U\oplus W$。任取$\alpha\in V$，则存在唯一的$w\in W,u\in U$使得$\alpha=w+u$，因此可以定义一个线性映射

$$P_W:V\to V$$
$$P\alpha=w$$

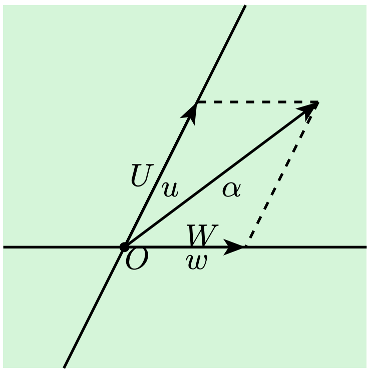
称$P_W$是平行于$U$在$W$上的一个投影。它满足

$$P_W(\alpha)=\begin{cases}\alpha & 若\alpha\in W\\ 0 & 若\alpha\in U\end{cases}$$

满足该式的$V$上的线性变换唯一。

证：由于$V=U\oplus W$，因此任取$\alpha\in V$，存在唯一的$w\in W,u\in U$使得$\alpha=w+u$，从而$P_W$是映射。又容易验证$P_W$保持加法和数乘，因此$P_W$是一个线性变换。

若$V$上的线性变换$A$也满足该式，任取$\alpha\in V,\alpha=u+w$，则$A(\alpha)=A(u+w)=A(u)+A(w)=w=P_W(\alpha)$，因此$A=P_W$，因此满足该式的线性变换唯一。




如上图所示，$P_W$将$\alpha$投影到$W$上得到$w$，而$u$则是$\alpha$在$U$上的分量。

下面我们探索一下投影变换的性质：任取$\alpha \in V, \alpha = u + w$，则

- $P_W^2(\alpha) = P_W(P_W(\alpha)) = w = P_W(\alpha)$
- $P_U^2(\alpha) = P_U(P_U(\alpha)) = u = P_U(\alpha)$
- $P_W P_U(\alpha) = P_W(P_U(\alpha)) = 0$
- $P_U P_W(\alpha) = P_U(P_W(\alpha)) = 0$

由此，我们有如下定义：

**定义 3.1.2（幂等变换）** 若线性空间上的线性变换$A$满足$A^2 = A$，则称$A$是一个幂等变换。

**定义 3.1.3（正交）** 若线性空间上的两个线性变换$A, B$满足$AB = BA = 0$，则称$A, B$是相互正交的。

下面探讨线性映射之间的运算以及线性映射的整体结构。

设$V, V'$是域$F$上两个线性空间，我们把所有从$V$到$V'$的线性映射的集合记为$Hom(V, V')$，下面来探讨其中元素能做哪些运算。

首先，作为映射，自然是满足乘法结合律，不满足交换律

其次，若$A$可逆，则$A$是$V \to V'$的一个同构映射（线性双射），且$A^{-1}$是$V' \to V$的一个同构映射。因此$A^{-1}$也是$Hom(V', V)$中的一个元素。

最后，$Hom(V, V')$中的元素还可以做加法和数乘：设$A, B \in Hom(V, V'), t \in F$，则定义

$$(A + B)\alpha = A\alpha + B\alpha, (tA)\alpha = t(A\alpha)$$

容易验证$A + B, tA \in Hom(V, V')$，因此$Hom(V, V')$在加法和数乘下封闭，因此$Hom(V, V')$是域$F$上的一个线性空间。

对于线性映射的乘法，不难验证有左右分配律：设$A, B \in Hom(V, U), C \in Hom(U, W), D \in Hom(M, V)$，则

$$C(A + B) = CA + CB, (A + B)D = AD + BD$$

特别地，$Hom(V, V)$对于加法和乘法成为一个有单位元的环，还可证明它的数乘和乘法满足$k(AB) = (kA)B = A(kB)$

**定义 3.1.4（代数）** 一个非空集合$\mathcal{A}$如果有加法、乘法运算，以及域$F$与$\mathcal{A}$之间的数乘运算，使得$\mathcal{A}$在加法和数乘下是一个线性空间，并且满足$k(AB) = (kA)B = A(kB)$，则称$\mathcal{A}$是域$F$上的一个代数，且把$\dim \mathcal{A}$称为$\mathcal{A}$的维数。

由以上分析可知，$Hom(V,V)$是域$F$上的一个代数。我们下面定义其中的减法和幂运算：

$$A-B := A+(-B)$$
$$A^m := A\cdot A\cdot ...\cdot A(m\text{个})$$
$$A^0 := I$$
$$A^{-m} := (A^{-1})^m(\text{前提是}A\text{可逆})$$

容易验证，

$$A^{m+n} = A^m\cdot A^n$$
$$(A^m)^n = A^{mn}$$

设$f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n\in F[x]$，$x$用$A$代入，得

$$f(A)=a_0I+a_1A+...+a_nA^n$$

因此$f(A)$也是$Hom(V,V)$中的一个元素。容易验证：

$$f(A)g(A)=g(A)f(A)$$

把$A$所有多项式的集合记作$F[A]$，得$F[A]$是交换环，并可看做$F$的扩环，于是$F[x]$中有关加法和乘法的定律在$F[A]$中也成立，这在后面非常有用。

研究完一般线性变换的运算性质，我们接着来研究一下特殊的线性变换，下面还是以投影变换为例。

**定理3.1.3**（投影变换的性质）设$U,W$是域$F$上一个线性空间$V$的两个子空间，且$V=U\oplus W$，则平行于$U$在$W$上的投影$P_W$和平行于$W$在$U$上的投影$P_U$满足是正交的幂等变换，且它们的和等于恒等变换$I$。

证："正交"，"幂等"前面已经证过了，这里我们证明$P_W+P_U=I$。任取$\alpha\in V,\alpha=u+w$，则

$$(P_W+P_U)\alpha=P_W(u+w)+P_U(u+w)=w+u=\alpha$$

因此$P_W+P_U=I$。

反过来，若$A,B$是域$F$上线性空间$V$上的两个正交的幂等变换，且$A+B=I$，那么$A,B$是否能看做$V$在某两个子空间$U,W$上的投影？答案是肯定的。

**定理3.1.4**（投影变换的逆定理）设$A,B$是域$F$上线性空间$V$上的两个正交的幂等变换，且$A+B=I$，则$V=ImA\oplus ImB$，且$A$是平行于$ImB$在$ImA$上的一个投影，$B$是平行于$ImA$在$ImB$上的一个投影。

证：任取$\alpha\in V$，则$\alpha=I\alpha=(A+B)\alpha=A\alpha+B\alpha\in ImA+ImB$

1.证明$ImA$是$V$的子空间：任取$\alpha,\beta\in ImA,k\in F$，则存在$u,v\in V$使得$\alpha=Au,\beta=Av$，因此$\alpha+\beta=Au+Av=A(u+v)$且$k\alpha=kAu=A(ku)$，因此$\alpha+\beta,k\alpha\in ImA$，从而$ImA$是$V$的一个子空间。

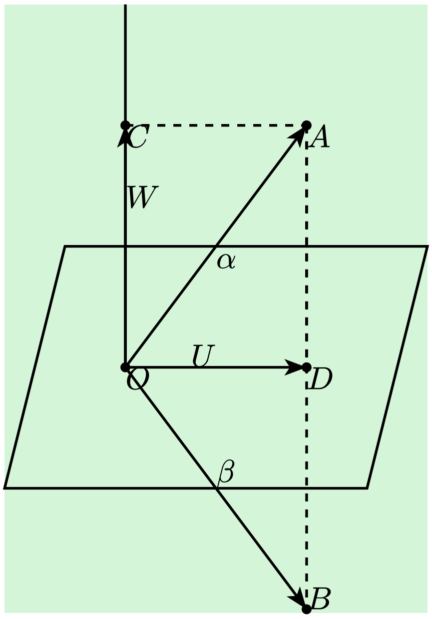
2.证明$ImA+ImB=ImA\oplus ImB$：任取$\alpha\in ImA\cap ImB$，则存在$u,v\in V$使得$\alpha=Au=Bv$，因此$A\alpha=A(Au)=A^2u=Au=\alpha$，又$B\alpha=B(Bv)=B^2v=Bv=\alpha$，因此$\alpha=(A+B)\alpha=I\alpha=\alpha$，因此$ImA\cap ImB=\{0\}$，因此$ImA+ImB=ImA\oplus ImB$。

因此，$V=ImA\oplus ImB$

3.证明$A$是平行于$ImB$在$ImA$上的一个投影：任取$\alpha\in ImA$，则存在$u\in V$使得$\alpha=Au$，因此$A\alpha=A(Au)=A^2u=Au=\alpha$。任取$\beta\in ImB$，则存在$v\in V$使得$\beta=Bv$，因此$A\beta=A(Bv)=0$（因为$A,B$正交）。因此$A$是平行于$ImB$在$ImA$上的一个投影。

证毕。

下面我们继续讨论一类特殊的线性变换：镜面反射变换$R_U$。




如图，$R_U(\alpha)=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\alpha-2P_W(\alpha)$则$R_U=I-2P_W$

再举一个例子，在$R[x]_n$中，给定$a\in\mathbb{R}$，令

$$\begin{aligned} T_a: \quad & R[x]_n \to R[x]_n \\ & f(x)\mapsto f(x+a) \end{aligned}$$

则$T_a$是$R[x]_n$上的一个线性变换，其中$D:R[x]_n\to R[x]_n$，$f(x)\mapsto f'(x)$是$R[x]_n$上的一个线性变换（平移）。根据泰勒公式，

$$\begin{aligned} f(x+a) &= f(x)+af'(x)+\frac{a^2}{2!}f''(x)+...+\frac{a^n}{n!}f^n(x) \\ &= I(f(x))+aD(f(x))+\frac{a^2}{2!}D^2(f(x))+...+\frac{a^n}{n!}D^{n(f(x))} \\ &= \left(I+aD+\frac{a^2}{2!}D^2+...+\frac{a^n}{n!}D^n\right)f(x) \end{aligned}$$

因此$T_a=I+aD+\frac{a^2}{2!}D^2+...+\frac{a^n}{n!}D^n$，这表明平移变换是导数$D$的一个多项式。

## 3.2 线性映射的核与象

定义 **3.2.1**（核与象）设$A$是域$F$上线性空间$V$到线性空间$V'$的一个线性映射，则称$A$的核为$KerA = \{\alpha \in V \mid A\alpha = 0\}$，称$A$的象为$ImA = \{\beta \in V' \mid \beta = A\alpha, \alpha \in V\}$。

定理 **3.2.1**（核与象是子空间）设$A$是域$F$上线性空间$V$到线性空间$V'$的一个线性映射，则$KerA$是$V$的一个子空间，$ImA$是$V'$的一个子空间。

证：以$KerA$为例，任取$\alpha, \beta \in KerA, k \in F$，则$A\alpha = 0, A\beta = 0$，因此$A(\alpha+\beta) = A\alpha + A\beta = 0$，又$A(k\alpha) = kA\alpha = 0$，因此$\alpha+\beta, k\alpha \in KerA$，因此$KerA$是$V$的一个子空间。

$ImA$的证明我们前面已经给出。

定理 **3.2.2**（核与象与映射类型的关系）设$A$是域$F$上线性空间$V$到线性空间$V'$的一个线性映射，则

- **(1)** $A$是单射（即$A\alpha = A\beta$蕴含$\alpha = \beta$）当且仅当$KerA = 0$
- **(2)** $A$是满射（即对任意$\beta \in V'$，存在$\alpha \in V$使得$A\alpha = \beta$）当且仅当$ImA = V'$

证：

- (1) $A$是单射当且仅当$KerA = 0$：必要性，设$\alpha \in KerA$，则$A\alpha = 0 = A0$，因此$\alpha = 0$，因此$KerA = 0$。充分性，设$A\alpha = A\beta$，则$A(\alpha - \beta) = 0$，因此$\alpha - \beta \in KerA = 0$，因此$\alpha = \beta$。
- (2) 定义如此。

那么，核与象有何关系？

定理 **3.2.3**（核与象的同构关系）设$A$是域$F$上线性空间$V$到线性空间$V'$的一个线性映射，则

$$V/KerA \cong ImA$$

在有限维情况下还有

$$\dim V = \dim KerA + \dim ImA$$

证：定义

$$T : V/KerA \to ImA$$
$$T(\alpha + KerA) = A\alpha$$

由于$\alpha + KerA = \beta + KerA \Leftrightarrow \alpha - \beta \in KerA \Leftrightarrow A(\alpha - \beta) = 0 \Leftrightarrow A\alpha = A\beta$，因此$T$是映射，同时也证明了$T$是单射。又任取$\beta \in ImA$，则存在$\alpha \in V$使得$A\alpha = \beta$，因此$T(\alpha + KerA) = A\alpha = \beta$，因此$T$是满射。因此$T$是双射。

又任取$\alpha, \beta \in V, k \in F$，则

$$\begin{aligned} T((\alpha + KerA) + (\beta + KerA)) &= T((\alpha+\beta) + KerA) \\ &= A(\alpha+\beta) \\ &= A\alpha + A\beta \\ &= T(\alpha + KerA) + T(\beta + KerA) \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} T(k(\alpha+KerA)) &= T(k\alpha+KerA) \\ &= A(k\alpha) \\ &= kA\alpha \\ &= kT(\alpha+KerA) \end{aligned}$$

因此$T$是线性双射。

证毕。

当$V$是有限维时，也称$\dim KerA$为$A$的零度，称$\dim ImA$为$A$的秩。下面我们继续来讨论一下线性映射的核与象的基的关系：

设$A$是域$F$上线性空间$V$到线性空间$V'$的一个线性映射，$\dim V=n$，在$KerA$中取一个基$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$，把它们扩充成$V$的一组基$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\alpha_{m+1},...,\alpha_n$，则$\alpha_{m+1}+KerA,\alpha_{m+2}+KerA,...,\alpha_n+KerA$是$V/KerA$的一组基。那么由于同构映射会把$V/KerA$的一组基映射成$ImA$的一组基，因此$A\alpha_{m+1},A\alpha_{m+2},...,A\alpha_n$是$ImA$的一组基。

若$\dim V=\dim V'<\infty$，我们有更强的结论：

**定理 3.2.4**（单射推满射）设$V,V'$都是域$F$上的有限维线性空间，且$\dim V=\dim V'$，则$V\to V'$的一个线性映射$A$是单射当且仅当它是满射。

证：

$$\begin{aligned} A\text{是单射} &\Leftrightarrow KerA=0 \\ &\Leftrightarrow \dim ImA=\dim V=\dim V' \\ &\Leftrightarrow ImA=V' \\ &\Leftrightarrow A\text{是满射} \end{aligned}$$

利用以上结论，还可以给出$AX=O$的解空间维数公式：设$A$是域$F$上$s\times n$矩阵，其列向量组为$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$，令

$$\begin{aligned} \mathbb{A}: F^n &\to F^s \\ \alpha &\to A\alpha \end{aligned}$$

则$\mathbb{A}$是$F^n\to F^s$的一个线性映射，$\mathbb{A}(\alpha)=A\alpha$。设$\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\in F^n$，则

$$KerA=\{\alpha\in F^n \mid A\alpha=0\}=W$$

$$\begin{aligned} ImA &= \{A\alpha \mid \alpha\in F^n\} \\ &= \{a_1\alpha_1+...+a_n\alpha_n\} \\ &= \langle\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\rangle \end{aligned}$$

这表明$KerA$为解空间，$ImA$为列空间，因此

$$\dim KerA+\dim ImA=n$$

即

$$\dim KerA = n - rank(A)$$

然而，对于有限维线性空间$V$上的线性变换$A$，尽管$\dim V = \dim KerA + \dim ImA$，但$V = KerA + ImA$却不一定成立。但是，当$A$满足一定条件时，$V = KerA + ImA$就可能成立了：

**定理 3.2.5**（幂等变换的一个重要结论）设$A$是域$F$上线性空间$V$上的一个幂等变换，则$V = KerA \oplus ImA$，并且$A$是平行于$KerA$在$ImA$上的一个投影。

证：

1.证$V = KerA + ImA$：任取$\alpha \in V$，则$\alpha = A\alpha + (\alpha - A\alpha)$，又$A(\alpha - A\alpha) = A\alpha - A^2\alpha = 0$，因此$\alpha - A\alpha \in KerA$，又$A\alpha \in ImA$，因此$\alpha \in KerA + ImA$，因此$V = KerA + ImA$。

2.证$KerA \cap ImA = 0$：任取$\alpha \in KerA \cap ImA$，则存在$\beta \in V$使得$\alpha = A\beta$，又$A\alpha = 0$，因此$A(A\beta) = 0$，因此$A\beta = 0$，因此$\alpha = 0$，因此$KerA \cap ImA = 0$。

3.证$A$是平行于$KerA$在$ImA$上的一个投影：任取$\alpha \in V$，则$\alpha = A\alpha + (\alpha - A\alpha)$，而$P_{ImA}(\alpha) = A\alpha$，故$P_{ImA} = A$。

证毕。

之前我们已经证过投影是幂等的，现在我们又证明了幂等变换是投影，这表明幂等变换与投影是等价的。并且我们由此还可得到以下推论：

**推论 3.2.1**（直和推投影）设$V = U \oplus W$，则$U = ImP_U, W = KerP_U$

证：任取$\alpha \in V, \alpha = u + w, u \in U, w \in W$，则$P_U(\alpha) = u$，故$ImP_U \subseteq U$

任取$u \in U$，则$P_U(u) = u$，故$U \subseteq ImP_U$

任取$w \in W$，则$P_U(w) = 0$，故$W \subseteq KerP_U$

任取$\alpha \in KerP_U$，则$P_U(\alpha) = 0$，因此$\alpha \in W$，故$KerP_U \subseteq W$

综上，$U = ImP_U, W = KerP_U$

**推论 3.2.2**（子空间与投影的关系）设$V$是域$F$上的一个线性空间，则$V$的任一子空间$U$是平行于$U$的一个补空间在$U$上的投影$P_U$的象，同时也是平行于$U$的一个补空间在$W$上的投影$P_W$的核。

证：由推论 3.2.1 立得。

由以上结论，可以看出投影变换在研究线性空间结构方面的重要作用：通过投影变换，我们可以把线性空间分解成两个子空间的直和，从而更好地理解线性空间的结构。

**定义 3.2.2**（余核）设$A$是域$F$上线性空间$V$到$V'$的一个线性映射，记$CokerA = V'/ImA$为$A$的余核。

## 3.3 线性映射和线性变换的矩阵表示

我们当然可以把线性映射当作一个特殊的映射较为抽象地研究，但是当$\dim V, \dim V' < \infty$时，我们也可以把线性映射用矩阵来表示，这样就可以利用矩阵的运算来研究线性映射的性质了。

设$V, V'$是域$F$上的两个有限维线性空间，$\dim V = n, \dim V' = s$，设$\mathcal{A}$是$V \to V'$的一个线性映射，由于证明过程大同小异且不是重点，我们不加证明的给出下列定理：

定理 **3.3.1**（映射空间到矩阵空间的同构）$\mathcal{A}$与$A$的对应是$Hom(V, V') \to M_{s\times n}(F)$的一个同构映射

定理 **3.3.2**（向量在线性映射下的坐标）线性空间中$V$取一个基$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$，$V$上线性变换$\mathcal{A}$在此基下的矩阵为$A$，$V$中向量$\alpha$在$\mathcal{A}$下的坐标为$A\alpha$

那么，线性变换$\mathcal{A}$在$V$的不同基下的矩阵表示有什么关系呢？

定理 **3.3.3**（相似变换）设$V$是域$F$上的一个有限维线性空间，$\mathcal{A}$是$V$上的一个线性变换，$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$和$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$是$V$的两组基，$A, B$分别是$\mathcal{A}$在这两组基下的矩阵表示，则存在可逆矩阵$P$，且$P$是从$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$到$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$的过渡矩阵，使得

$$B = P^{-1}AP$$

证：由已知

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) &= (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)A \\ \mathcal{A}(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) &= (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)B \\ (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) &= (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)P\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) &= \mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)P \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)AP \\ &= (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)P^{-1}AP\end{aligned}$$

因此

$$B = P^{-1}AP$$

由以上定理可知，线性变换在不同基下的矩阵表示是相似的，因此我们可以通过研究矩阵的相似变换来研究线性变换的性质了。

## 3.4 线性函数与对偶空间

定义 **3.4.1**（线性函数）设$V$是域$F$上的一个线性空间，$V$上的一个映射$f: V \to F$称为一个线性函数，如果对所有$v_1, v_2 \in V$和所有$a, b \in F$，有$f(av_1 + bv_2) = af(v_1) + bf(v_2)$。且$V$上的所有线性函数的集合记为记作$Hom(V, F)$，称作线性函数空间。

例如，对于

$$\mathrm{tr}: M_n(F) \to F$$
$$A = (a_{ij}) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

由于我们已经知道

$$\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B), \mathrm{tr}(kA) = k\,\mathrm{tr}(A)$$

因此tr是$M_n(F)$上的一个线性函数，称之为迹函数。

那么，对于一般的域$F$上线性空间$V$，$V$上的线性函数是什么样子的呢？我们下面来研究一下。

首先，在$V$上取一个基$\alpha_1,...,\alpha_n$，如果再知道$f(\alpha_1), f(\alpha_2), ..., f(\alpha_n)$，那么对于任意$v \in V$，我们都可以通过线性计算出$f(v)$。例如$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i$，则$f(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\alpha_i)$。反之，任意取定$a_1,...,a_n \in F$，对于任意$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i \in V$，定义$f(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$，其中$x_1,...,x_n$是$v$在基$\alpha_1,...,\alpha_n$下的坐标，则$f$是$V$上的一个线性函数且$f(\alpha_i) = a_i$。

综上，我们可以得到以下定理：

**定理 3.4.1**（线性函数的充要条件）域$F$上$n$维线性空间$V$上的一个映射$f: V \to F$是一个线性函数当且仅当存在$f$在$V$的一组基下的表达式是$\alpha$在此基下的坐标的一次齐次多项式。

进一步地，由于$\dim Hom(V,F) = \dim V$，故$Hom(V,F) \cong V$，因此设$V$的一组基$\alpha_1,...,\alpha_n$，那么构造

$$\sigma: Hom(V,F) \to V$$
$$\sigma(f) = (f(\alpha_1), f(\alpha_2), ..., f(\alpha_n))$$

容易验证$\sigma$为同构映射。那么对于$\sigma^{-1}$，在$F^n$中取标准基$\varepsilon_1,...,\varepsilon_n$则

$$\sigma^{-1}(\varepsilon_i) = f_i$$

其中$f_i$是$V$上的一个线性函数，满足$f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$，因此

$$f_i(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} x_j f_i(\alpha_j) = x_i$$

因此$f_i$是$V$的一组基$\alpha_1,...,\alpha_n$的对偶基。此时把$Hom(V,F)$看作$V$的对偶空间，记作$V^*$。

对于$V$中任意向量$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i$，我们有$f_i(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} x_j f_i(\alpha_j) = x_i$则$\alpha$坐标的第$i$个分量就是$f_i(\alpha)$。

对于$V^\star$中的任一向量$f \in V^*$，我们有$f = \sum_{i=1}^{n} f_i k_i$，有$f(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{n} k_i f_i(\alpha_j) = k_j$，即$f$在对偶基下的坐标的第$j$个分量就是$f(\alpha_j)$。

**定理 3.4.2**（原基与对偶基过渡矩阵的关系）设$V$是域$F$上的$n$维线性空间，$\alpha_1,...,\alpha_n$和$\beta_1,...,\beta_n$是$V$的两组基，$f_1,...,f_n$和$g_1,...,g_n$分别是它们的对偶基，设从$\alpha_1,...,\alpha_n$到$\beta_1,...,\beta_n$的过渡矩阵为$P$，则从$f_1,...,f_n$到$g_1,...,g_n$的过渡矩阵为$(P^{-1})^T$。

证：设$P = (p_{ij})$，则

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\alpha_i$$

，因此

$$g_k(\beta_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} g_k(\alpha_i) = p_{kj}$$

又

$$g_k(\beta_j) = \sum_{i=1}^{n} q_{ik} f_i(\beta_j) = q_{jk}$$

因此

$$q_{jk} = p_{kj}$$

即$Q = P^T$，因此从$f_1, ..., f_n$到$g_1, ..., g_n$的过渡矩阵为$(P^{-1})^T$。

设$V$是域$F$上$n$维空间，$\alpha_1, ..., \alpha_n$是$V$的一组基，$f_1, ..., f_n$是它的对偶基，由定理 2.3.1 可知

$$\sigma : V \to V^{\star}$$
$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i \to \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

是一个同构映射，把$\alpha$在$\sigma$下的像称为$f_\alpha$，对于$V$中任意向量$\beta = \sum_{i=1}^{n} y_i\alpha_i$，则

$$f_\alpha(\beta) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(\beta) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

这表明$f_\alpha$在$\beta$处的函数值等于$\alpha$与$\beta$坐标对应分量的乘积之和。

类似地，我们发现$\alpha$在$V \to V^{\star\star}$的同构映射下的像在$f$处的函数值，等于$f$在$\alpha$处的函数值，这不依赖于$V$中基的选择，因此我们称这种同构映射为自然同构，记作$V \cong V^{\star\star}$。

## 3.5 线性变换的特征值与特征向量 & 对角化

题接 3.3，我们已经发现线性变换在不同基下的矩阵表示是相似的，下面我们试图研究如何找出$V$的一个适当的基，使得$A$在这个基下的矩阵表示最简单。至于最简单的矩阵，那自然是对角阵，因此若设$A$在$V$的基$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$下的矩阵表示为$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$，那么有

$$A(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)D$$

即

$$A\xi_i = \lambda_i\xi_i$$

由此，我们引出了特征值和特征向量的概念：

**定义 3.5.1**（特征值与特征向量）设$\mathcal{A}$是域$F$上的一个线性变换，$\xi \in V$是$\mathcal{A}$的一个特征向量，如果存在$\lambda \in F$使得$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi$，则称$\lambda$是特征值，称$\xi$是对应于特征值$\lambda$的一个特征向量。

对于线性变换$\mathcal{A}$，设它在$V$上一个基$\alpha_1, ..., \alpha_n$下的矩阵表示为$A$，向量$\xi$在$\alpha_1, ..., \alpha_n$下的坐标为$X$，则根据 3.3 节的结论，有

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi \Leftrightarrow AX = \lambda X$$

因此，$A$的特征值和特征向量就是线性变换$\mathcal{A}$的特征值和特征向量。

若$V$中真的存在一组基$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$使得$\mathcal{A}\xi_i = \lambda_i\xi_i$，则$\mathcal{A}$在这组基下的矩阵表示为对角阵，因此我们称$\mathcal{A}$是可对角化的。

由上述讨论，我们可以得出以下结论：

**定理 3.5.1**（可对角化的充要条件 1）线性变换$\mathcal{A}$是可对角化的当且仅当$\mathcal{A}$有$n$个线性无关的特征向量$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$，此时$\mathcal{A}$在基$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$下的矩阵表示为对应特征值组成的对角阵。

立得以下推论：

**定理 3.5.2**（可对角化的充要条件 2）线性变换$\mathcal{A}$是可对角化的当且仅当$V$中存在由$\mathcal{A}$的特征向量组成的一组基。

那么这些特征向量组成的空间有什么很好的性质吗？

**定义 3.5.2**（特征子空间）设$\mathcal{A}$是域$F$上的一个线性变换，$\lambda \in F$是一个特征值，则$\mathcal{A}$对应于特征值$\lambda$的特征子空间定义为$V_\lambda = \{v \in V \mid \mathcal{A}v = \lambda v\}$。

证明是显然的。且

$$\alpha \in V_\lambda \Leftrightarrow A\alpha = \lambda\alpha \Leftrightarrow (\lambda I - A)\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha \in Ker(\lambda I - A)$$

因此

$$V_\lambda = Ker(\lambda I - A)$$

则

$$\dim(V_\lambda) = n - rank(\lambda I - A)$$

由于上学期学过的$n$级矩阵$A$可对角化当且仅当$A$特征子空间的维数之和等于$n$，因此我们可以得出以下结论：

**定理 3.5.3**（可对角化的充要条件 3）线性变换$\mathcal{A}$是可对角化的当且仅当$\mathcal{A}$的每个特征值对应的特征子空间的维数之和等于$\dim V$。

进一步的，还有与直和结合的结论：

**定理 3.5.4**（可对角化的充要条件 4）线性变换$\mathcal{A}$是可对角化的当且仅当

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus ... \oplus V_{\lambda_k}$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$是$\mathcal{A}$的全部特征值。

由于$A$在$V$的不同基下的矩阵相似，而相似的矩阵特征多项式相同，因此把特征多项式、代数重数、几何重数等概念引入到线性变换中来是非常自然的。并且有个小结论，即线性变换$A$的特征值的代数重数大于等于几何重数。此处不再证明。

既然有了直和，我们分别从特征子空间$V_{\lambda_i}$中取一组基$\xi_{i1},\xi_{i2},...,\xi_{ir_i}$，则$\xi_{11},\xi_{12},...,\xi_{1r_1},\xi_{21},\xi_{22},...,\xi_{2r_2},...,\xi_{k1},\xi_{k2},...,\xi_{kr_k}$是$V$的一组基，那么$A$在这组基下的矩阵表示为对角阵$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k\end{pmatrix}$，那么特征多项式为

$$\det(\lambda I-D)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}...(\lambda-\lambda_k)^{r_k}$$

为一次因式方幂之积，反过来证明可由定理 3.5.2 立得。

**定理 3.5.5**（可对角化的充要条件 5）$A$可对角化当且仅当$A$的特征多项式在$F[\lambda]$上可分解为

$$(\lambda-\lambda_1)^{l_1}(\lambda-\lambda_2)^{l_2}...(\lambda-\lambda_k)^{l_k}$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$是$A$的全部特征值，且$A$的每个特征值的代数重数等于几何重数。

在 3.7 中，还有充要条件 6，这 6 个充要条件需要熟练掌握。

## 3.6 线性变换的不变子空间，Hamilton-Cayley 定理

在 3.5 中，我们解决了可对角化的问题，那么如果$A$不可对角化，我们是否可以找到一个适当的基，使得$A$在这个基下的矩阵表示尽可能简单呢？从 3.5 节分解成特征子空间的直和，启发我们研究$A$的不变子空间。

**定义 3.6.1**（不变子空间）设$A$是域$F$上的一个线性变换，$U\subseteq V$是$V$的一个子空间，如果对任意$u\in U$，有$Au\in U$，则称$U$是$A$的不变子空间，简称为$A$-子空间。

下面我们研究$V$上有哪些不变子空间：

**定理 3.6.1**（$KerA,ImA,V_\lambda$三件套都是不变子空间）$V$上线性变换$A$的核、象以及特征子空间都是$A$-子空间。

证：据定义验证即可。

**定理 3.6.2**（可交换的线性变换的三件套是不变子空间）设$A,B$是域$F$上的两个线性变换，如果$AB=BA$，则$KerA,ImA,V_\lambda$都是$B$-子空间；反之亦然。

证：

1.$KerB$：任取$\alpha\in KerB$，则$B\alpha=0$，又$AB\alpha=A0=0$，又$AB=BA$，因此$BA\alpha=0$，因此$A\alpha\in KerB$，因此$KerB$是$A$-子空间。

2.$ImB$：任取$\alpha\in ImB$，则存在$\beta\in V$使得$\alpha=B\beta$，又$AB=BA$，因此$A\alpha=A(B\beta)=(BA)(\beta)=B(A\beta)$，因此$A\alpha\in ImB$，故$ImB$是$A$-子空间。

3.$V_\lambda$：任取$\alpha\in V_\lambda$，则$A\alpha=\lambda\alpha$，又$AB=BA$，因此$A(B\alpha)=(BA)\alpha=\lambda(B\alpha)$，因此$B\alpha\in V_\lambda$，因此$V_\lambda$是$A$-子空间。

**推论 3.6.1**（多项式的三件套是不变子空间）设$A$是域$F$上的一个线性变换，$f(x) \in F[x]$，则$Kerf(A), Imf(A), f(A)$的$V_\lambda$都是$A$-子空间。

证：由于$f(A)$与$A$可交换，因此由定理 3.6.2 立得。

**定理 3.6.3**（不变子空间的交与和）$V$上线性变换$A$的任意多个不变子空间的交与和都是$A$-子空间。

证：据定义验证即可。

**定理 3.6.4**（特征向量张成的空间）设$A$是域$F$上的一个线性变换，$\xi \in V \wedge \xi \neq 0$，则$\xi$是$A$的特征向量当且仅当$\langle\xi\rangle$是$A$-子空间。

证：

$\Rightarrow$：任取$\alpha \in \langle\xi\rangle$，则存在标量$a \in F$使得$\alpha = a\xi$，又$A\alpha = aA\xi = a\lambda\xi$，因此$A\alpha \in \langle\xi\rangle$，因此$\langle\xi\rangle$是$A$-子空间。

$\Leftarrow$：由于$\langle\xi\rangle$是$A$-子空间，因此存在标量$a \in F$使得$A\xi = a\xi$，因此$\xi$是特征向量。

**定理 3.6.5**（验证子空间只需验证基）设$A$是域$F$上的一个线性变换，$U = \langle\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\rangle$是$V$的一个子空间，则$U$是$A$-子空间$\Leftrightarrow A\alpha_i \in U$

证：必要性显然，充分性据定义验证即可。

由于不变子空间的性质，我们有限制映射$A|_U : U \to U$是不变子空间$U$上的一个线性变换，进一步的，$A$还可以诱导出商空间$V/U$上的一个线性变换$A : V/U \to V/U$，定义为$A(v + U) = Av + U$，证明是显然的。

研究完不变子空间，我们就可以研究不可对角化的线性变换的矩阵表示了，下面我们设$V$是域$F$上的$n$维线性空间，$A$是$V$上的一个线性变换。

首先，探索$A$的矩阵表示为分块对角矩阵的充要条件。事实上，我们有如下定理：

**定理 3.6.6**（分块对角矩阵的充要条件）设$A$是域$F$上$n$维线性空间$V$上的一个线性变换，则$A$在$V$的一组基下的矩阵表示为分块对角矩阵$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}$当且仅当$V$可以分解成$A$的非平凡不变子空间的直和$V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_k$，且$A_i$是$A|_{W_i}$在$W_i$的一组基下的矩阵表示。

证：设$A$在$V$的一组基$\alpha_{11}, ..., \alpha_{1r_1}, \alpha_{21}, ..., \alpha_{2r_2}, ..., \alpha_{k1}, ..., \alpha_{kr_k}$下的矩阵表示为$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}$，其中$A_i$是$r_i$级矩阵，$r_i \geq 1$，令$W_i = \langle\alpha_{i1}, ..., \alpha_{ir_i}\rangle$，则$V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_k$，且$A\left(\alpha_{i1}, ..., \alpha_{ir_i}\right) = \left(\alpha_{i1}, ..., \alpha_{ir_i}\right)A_i$，则对于任意$w \in W_i$，有$Aw \in W_i$，因此$W_i$是$A$的一个不变子空间，且$A|_{W_i}$在基$\alpha_{i1}, ..., \alpha_{ir_i}$下的矩阵表示为$A_i$。反之，设$V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_k$，且$A|_{W_i}$在$W_i$的一组基下的矩阵表示为$A_i$，则取$V$的一组基为

$\alpha_{11},...,\alpha_{1r_1},\alpha_{21},...,\alpha_{2r_2},...,\alpha_{k1},...,\alpha_{kr_k}$,其中$\alpha_{i1},...,\alpha_{ir_i}$是$W_i$的一组基,则$A$在这组基下的矩阵表示为分块对角矩阵$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}$。

那么，接下来的任务就是想办法把$A$分解成几个非平凡不变子空间的直和了。而我们已经知道对任意的$f(\lambda)\in F[x]$，都有$Kerf(A)$是$A$的一个不变子空间，经验证有以下结论：

定理 **3.6.7**（互素多项式的分解）设$A$是域$F$上线性空间（可以无限维）$V$上的一个线性变换，在$K[x]$中，$f(x)=f_1(x)f_2(x)$，且$(f_1(x),f_2(x))=1$，则$Kerf(A)=Kerf_1(A)\oplus Kerf_2(A)$。

证:

1.先证$Kerf(A)=Kerf_1(A)+Kerf_2(A)$: 任取$\alpha\in Kerf(A)$，则$f(A)\alpha=0$，又$f(x)=f_1(x)f_2(x)$，因此$f_1(A)f_2(A)\alpha=0$，又$(f_1(x),f_2(x))=1$，因此存在$g_1(x),g_2(x)\in F[x]$使得$g_1(x)f_1(x)+g_2(x)f_2(x)=1$，因此$\alpha=(g_1(A)f_1(A)+g_2(A)f_2(A))\alpha=g_1(A)f_1(A)\alpha+g_2(A)f_2(A)\alpha$，因此$\alpha\in Kerf_1(A)+Kerf_2(A)$。

2.再证$Kerf_1(A)\cap Kerf_2(A)=\{0\}$: 任取$\alpha\in Kerf_1(A)\cap Kerf_2(A)$，则$f_1(A)\alpha=0$且$f_2(A)\alpha=0$，又$(f_1(x),f_2(x))=1$，因此存在$g_1(x),g_2(x)\in F[x]$使得$g_1(x)f_1(x)+g_2(x)f_2(x)=1$，因此$\alpha=(g_1(A)f_1(A)+g_2(A)f_2(A))\alpha=g_1(A)f_1(A)\alpha+g_2(A)f_2(A)\alpha=0$，因此$Kerf_1(A)\cap Kerf_2(A)=\{0\}$。

证毕。

当然，以上定理也可以推广到多个互素多项式的情况。

定理 **3.6.8**（多个互素多项式的分解）设$A$是域$F$上线性空间（可以无限维）$V$上的一个线性变换，在$K[x]$中，$f(x)=f_1(x)f_2(x)...f_k(x)$，且$\big(f_i(x),f_j(x)\big)=1$对于所有$i\neq j$，则$Kerf(A)=Kerf_1(A)\oplus Kerf_2(A)\oplus...\oplus Kerf_k(A)$。

证：对右边多项式个数$s$进行数学归纳:

1.当$s=2$时，结论成立。

2.假设当$s=k-1$时结论成立,那么当$s=k$时,设$g(x)=f_1(x)f_2(x)...f_{k-1}(x)$,则$g(x)$与$f_k(x)$互素,因此由定理3.6.7立得$Kerf(A)=Kerg(A)\oplus Kerf_k(A)$,又由归纳假设立得$Kerg(A)=Kerf_1(A)\oplus Kerf_2(A)\oplus...\oplus Kerf_{k-1}(A)$，因此$Kerf(A)=Kerf_1(A)\oplus Kerf_2(A)\oplus...\oplus Kerf_k(A)$。

证毕。

结合以上结论，再加上$Ker0=V$，那么我们只需找到$f(A)=0$，然后把$f(x)$分解成互素多项式的积，就可以把$V$分解成几个非平凡不变子空间的直和了！

由此，我们引出以下定义：

定义 **3.6.2**（零化多项式）设$A$是域$F$上线性空间$V$上的一个线性变换，如果存在非零多项式$f(x)\in F[x]$使得$f(A)=0$，则称$f(x)$为$A$的零化多项式。

设$\dim V=n$，$\dim Hom(V,V)=n^2$，从而$I,A,A^2,...,A^{n^2}$线性相关，因此存在非零多项式$f(x)\in F[x]$使得$f(A)=0$，即$f(x)$为$A$的零化多项式。

而$A$在$V$的一组基下的矩阵表示为$A$，则$A$的零化多项式就是$A$的零化多项式。

下面我们来找出$A$的零化多项式。

大定理 3.6.9（Hamilton-Cayley 定理）设$A$是域$F$上的$n$级矩阵，则$A$的特征多项式$\det(\lambda I-A)$是$A$的一个零化多项式。

证：设$B(\lambda)$是$\lambda I-A$的伴随矩阵，则$B(\lambda)(\lambda I-A)=\det(\lambda I-A)I=f(\lambda)I$，又$B(\lambda)$元素是$\lambda I-A$的代数余子式，故$B(\lambda)$的元素次数不超过$n-1$，从而$B(\lambda)$可以写成

$$B(\lambda)=\lambda^{n-1}B_{n-1}+...+\lambda B_1+B_0$$

其中$B_i$是$n$级矩阵，代入上式得

$$(\lambda^{n-1}B_{n-1}+...+\lambda B_1+B_0)(\lambda I-A)=(\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+...+a_1\lambda+a_0)I$$

比较两边的系数得

$$\begin{gathered}B_{n-1}=I\\B_{n-2}-B_{n-1}A=a_{n-1}I\\...\\-B_0A=a_0I\end{gathered}$$

代入得$f(A)=0$，即$A$的特征多项式是$A$的一个零化多项式。

## 3.7 线性变换与矩阵的最小多项式

为了在$V$中找一组基使得$A$在这组基下的矩阵表示尽可能简单，从 3.6 可知第一步是找$A$的零化多项式。例如特征多项式。把它分解成不等的互素多项式的积，就可以把$V$分解成几个非平凡不变子空间的直和了。在每个不变子空间取一组基，合起来就是$V$的一组基，在这组基下的矩阵表示为分块对角矩阵了。第二步自然是在每个不变子空间中取一个合适的基，使得$A$在这个基下的矩阵表示尽可能简单了。凭直觉似乎第一步的零化多项式越简单，第二步就越简单，因此我们有必要找出$A$的一个最简单的零化多项式。

定义 **3.7.1**（最小多项式）设$A$是域$F$上线性空间$V$上的一个线性变换，在$A$的所有零化多项式中，次数最小的非零首一多项式称为$A$的最小多项式。

定理 **3.7.1**（最小多项式唯一）线性变换$A$的最小多项式是唯一的。

证：设$m_1(\lambda),m_2(\lambda)$都是$A$的最小多项式，则次数相等且首项为 1，则$h(\lambda)=m_1(\lambda)-m_2(\lambda)$次数小于$m_1(\lambda)$，又$h(A)=m_1(A)-m_2(A)=0$，因此$h(\lambda)=0$，因此$m_1(\lambda)=m_2(\lambda)$。

定理 **3.7.2**（零化多项式是最小多项式的倍式）$f(x)$是$A$的零化多项式当且仅当$f(x)$是$A$的最小多项式$m(\lambda)$的倍式。

证：

$\Leftarrow$：设$f(\lambda)=m(\lambda)g(\lambda)$，则$f(A)=m(A)g(A)=0$，因此$f(\lambda)$是$A$的零化多项式。

$\Rightarrow$: 设$f(\lambda)$是$A$的零化多项式，设$g(\lambda)=f(\lambda)\div m(\lambda)$，则$f(\lambda)=m(\lambda)g(\lambda)+r(\lambda)$，其中$r(\lambda)=0$或$r(\lambda)$的次数小于$m(\lambda)$的次数，又$r(A)=f(A)-m(A)g(A)=0$，因此$r(\lambda)=0$，因此$f(\lambda)=m(\lambda)g(\lambda)$，即$f(x)$是$A$的最小多项式$m(\lambda)$的倍式。

**定理 3.7.3**（最小多项式与特征多项式同根）设$A$是域$F$上有限维线性空间$V$上的一个线性变换，则$A$的最小多项式与特征多项式有相同的根。

证：由于$m(\lambda)\mid f(\lambda)$，从而$m(\lambda)$的每个根也是$f(\lambda)$的根。

反之，设$\lambda_0$是$f(\lambda)$一根，则$\lambda_0$是$A$的一个特征值，因此存在非零向量$\xi\in V$使得$A\xi=\lambda_0\xi$，又$m(A)\xi=0$，因此设$m(\lambda)=c_0+c_1\lambda+...+c_s\lambda^s$，那么

$$0=m(A)\xi=(c_0I+c_1A+...+c_sA^s)\xi=c_0\xi++c_1\lambda_0\xi+...+c_s\lambda_0^s\xi=m(\lambda_0)\xi$$

因此$\lambda_0$也是$m(\lambda)$的根。

**推论 3.7.1**（相似矩阵最小多项式相同）设$A$和$B$是相似矩阵，则它们的最小多项式相同。

证：设$P$是可逆矩阵使得$B=P^{-1}AP$，则对于任意多项式$f(\lambda)$，有$f(B)=P^{-1}f(A)P$，因此$f(B)=0\Leftrightarrow f(A)=0$，因此$A$和$B$的零化多项式相同，因此最小多项式相同。

对上述结论，我们可以扩域加强：

**定理 3.7.4**（最小多项式与特征多项式扩域同根）设$A$是域$F$上的$n$级矩阵，$E$是$F$的一个扩域，则$A$的最小多项式与特征多项式在$E[\lambda]$上有相同的根。

证：证明几乎同定理 3.7.3，不再赘述。

同样地，扩域后最小多项式不变。

**定理 3.7.5**（最小多项式扩域不变）设$A$是域$F$上的$n$级矩阵，$E$是$F$的一个扩域，则$A$的最小多项式在$E[\lambda]$上仍然是$A$的最小多项式。

证：显然$m(\lambda)$在$E[\lambda]$是$A$的一个零化多项式，设$\tilde{m}(\lambda)$为$A$在$E[\lambda]$上的最小多项式，则$\tilde{m}(\lambda)\mid m(\lambda)$。设$\tilde{m}(\lambda)=b_0+b_1\lambda+...+b_{r-1}\lambda^{r-1}+b_r\lambda^r$代入得

$$0=\tilde{m}(A)=b_0I+b_1A+...+b_{r-1}A^{r-1}+A^r$$

则

$$b_0\delta_{ij}+b_1a_{ij}+...+b_{r-1}a_{ij}^{(r-1)}+a_{ij}^{(r)}=0$$

令

$$H=\begin{pmatrix}\delta_{11} & a_{11} & a_{11}^{(2)} & \dots & a_{11}^{(r)}\\ \delta_{12} & a_{12} & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{12}^{(r)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ \delta_{nn} & a_{nn} & a_{nn}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(r)}\end{pmatrix}$$

则$\begin{pmatrix}b_0\\ b_1\\ \vdots\\ b_{r-1}\\ 1\end{pmatrix}$是$r+1$元$HX=0$的一个解。由于$H$是$F$上的矩阵，且解线性方程组是对$H$的元素进行四则运算的结果，因此$\begin{pmatrix}b_0\\ b_1\\ \vdots\\ b_{r-1}\\ 1\end{pmatrix}$也是$F$上的解，因此$\tilde{m}(\lambda)$在$F[\lambda]$上也是$A$的一个零化多项式，因此$m(\lambda)\mid\tilde{m}(\lambda)$，因此$m(\lambda)=\tilde{m}(\lambda)$，即$A$的最小多项式在$E[\lambda]$上仍然是$A$的最小多项式。

下面我们将再次引入约当矩阵的概念，来研究不可对角化的线性变换的矩阵表示。

回忆一下，在第一章中，我们证明了任意复数域上的矩阵都与一个唯一的约当标准形相似。在本章的视角下，约当标准形是不可对角化的矩阵在一组基下最简的矩阵表示。

定义 3.7.2（约当块）称域$F$上$r$级矩阵

$$J_r(a)=\begin{pmatrix}a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a\end{pmatrix}$$

为$r$级约当块。

定理 3.7.6（约当块最小多项式等于特征多项式）$J_r(a)$的$f(\lambda)=m(\lambda)$

证：$J_r(a)-aI=J_r(0)$，且$(J_r(0))^r=0$，并且$s<r$时，$(J_r(0))^s\neq 0$。从而$(\lambda-a)^s$不是$J_r(a)$的零化多项式，而$(\lambda-a)^r$是$J_r(a)$的零化多项式，因此$J_r(a)$的最小多项式为$m(\lambda)=(\lambda-a)^r$，又$J_r(a)$的特征多项式为$f(\lambda)=(\lambda-a)^r$，因此$f(\lambda)=m(\lambda)$。

定理 3.7.7（不变子空间最小多项式与全空间关系）设$A$是域$F$上线性空间$V$上的一个线性变换，若$V$能分解为$A$的非平凡不变子空间的直和$V=W_1\oplus W_2\oplus\dots\oplus W_k$，则$A|_{W_i}$的最小多项式$m_i(\lambda)$与$A$的最小多项式$m(\lambda)$满足

$$m(\lambda)=[m_1(\lambda),m_2(\lambda),\dots,m_k(\lambda)]$$

证：设$q(\lambda)$是$V$上$A$的任意一个零化多项式，则$\forall\alpha_j\in W_j$，

$$0=q(A)\alpha_j=q\left(A|_{W_j}\right)\alpha_j$$

从而$q(\lambda)$是$A|_{W_j}$的一个零化多项式，因此$m_j(\lambda)\mid q(\lambda)$，因此$[m_1(\lambda),m_2(\lambda),\dots,m_k(\lambda)]\mid q(\lambda)$，因此$[m_1(\lambda),m_2(\lambda),\dots,m_k(\lambda)]\mid m(\lambda)$。令$g(\lambda)=[m_1(\lambda),m_2(\lambda),\dots,m_k(\lambda)]$，任取$\alpha\in V$，则存在唯一的$w_j\in W_j$使得$\alpha=w_1+w_2+\dots+w_k$，又$g(A)\alpha=g\left(A|_{W_1}\right)w_1+g\left(A|_{W_2}\right)w_2+$

$\ldots + g\left(A|_{W_k}\right)w_k = 0$，因此$g(\lambda)$是$A$的一个零化多项式，因此$m(\lambda) \mid g(\lambda)$，因此$m(\lambda) = [m_1(\lambda), m_2(\lambda), \ldots, m_k(\lambda)]$。

**定义 3.7.3（约当形矩阵）** 由若干个约当块组成的分块对角矩阵称作约当形矩阵。

下面我们利用最小多项式来研究线性变换的矩阵表示。

**定理 3.7.8（可对角化充要条件 6）** 域$F$上$n$线性空间$V$上的一个线性变换$A$可对角化当且仅当$A$的最小多项式在$F[\lambda]$上分解成不等的一次因式之积。

证:

$\Rightarrow$：设$A$可对角化，则$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_s}$，其中$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$是$A$的全部特征值，且$V_{\lambda_i}$是$A$的特征子空间，设$A|_{V_{\lambda_i}}$的最小多项式为$m_i(\lambda)$，又

$$\left(A|_{V_{\lambda_j}} - \lambda_j I\right)\alpha_j = 0$$

，则$m_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)$，因此$A|_{V_{\lambda_i}}$的最小多项式为$(\lambda - \lambda_i)$，又由定理 3.7.7 立得$A$的最小多项式$m(\lambda) = [m_1(\lambda), m_2(\lambda), \ldots, m_s(\lambda)] = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_s)$。

$\Leftarrow$：设$A$的最小多项式在$F[\lambda]$上分解成不等的一次因式之积$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_s)$，其中$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$是$A$的全部特征值，由定理 3.6.8 立得$V = Ker(A - \lambda_1 I) \oplus Ker(A - \lambda_2 I) \oplus \ldots \oplus Ker(A - \lambda_s I) = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_s}$，因此$A$可对角化。

**推论 3.7.1（非平凡不变子空间的可对角化）** 若域$F$上$n$线性空间$V$上的一个线性变换$A$可对角化，那么对于$A$的任意一个非平凡不变子空间$U$，$A|_U$也是可对角化的。

证：设$A, A|_U$最小多项式分别为$m(\lambda), m_U(\lambda)$，则$m_U(\lambda) \mid m(\lambda)$，又$m(\lambda)$在$F[\lambda]$上分解成不等的一次因式之积，因此$m_U(\lambda)$在$F[\lambda]$上分解成不等的一次因式之积，因此$A|_U$可对角化。

据以上知识，设线性变换$A$的最小多项式在$F[\lambda]$上分解成

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1}(\lambda - \lambda_2)^{l_2}\ldots(\lambda - \lambda_s)^{l_s}$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$是$F$中两两不等元素，则

$$V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_s$$

$$W_j = Ker\left(\lambda_j I - A\right)^{l_j}$$

因此$A$在$V$的一组基下的矩阵表示为分块对角矩阵$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$，其中$A_j$是$A|_{W_j}$在$W_j$的一组基下的矩阵表示。若要$A$最简单，只需$A_j$最简单，只需研究$A|_{W_j}$

首先，我们证明$A|_{W_j}$的最小多项式为$m_j(\lambda) = \left(\lambda - \lambda_j\right)^{l_j}$。这是因为$\left(\lambda - \lambda_j\right)^{l_j}$首先是零化的，那么可设$A$的最小多项式$m(\lambda) = \left(\lambda - \lambda_j\right)^{t_j}$，其中$t_j \le l_j$，又根据定理 3.7.7 立得$m(\lambda) = \left(\lambda - \lambda_j\right)^{t_1}\ldots\left(\lambda - \lambda_j\right)^{t_s}$，那么$t_j = l_j$，得证。

那么我们记$B_j = A|_{W_j} - \lambda_j I$，则$B_j$是幂零指数为$l_j$的幂零变换。那么问题就转换成了求$B_j$最简单的形式。

## 3.8 幂零变换的 Jordan 标准形

设$B$是域$F$上$r$维线性空间$V$上的一个幂零变换，幂零指数为$l$，则$l \leq r$，则存在$\xi \in V$使得$B^{l-1}\xi \neq 0, B^l = 0$，此时$\xi, B\xi, ..., B^{l-1}\xi$为$\langle \xi, B\xi, ..., B^{l-1}\xi \rangle$的一组基。显然该空间为$B$的一个不变子空间，且$B\left(B^{l-1}\xi, ..., B\xi, \xi\right) = \left(B^{l-1}\xi, ..., B\xi, \xi\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则$B|_{\langle \xi, B\xi, ..., B^{l-1}\xi \rangle}$的矩阵表示为$J_l(0)$。

**定义 3.8.1**（强循环子空间）若$\eta \in W$，且存在正整数$t$，使得$B^{t-1}\eta \neq 0, B^t\eta = 0$，则称$\langle B^{t-1}\eta, ..., B\eta, \eta \rangle$为由$\eta$生成的$B$-强循环子空间。

**定理 3.8.1**（强循环子空间分解定理）设$B$是域$F$上$r$维线性空间$W$上的一个幂零变换，幂零指数为$l$，则$W$能分解成$\dim W_0$个强循环子空间的直和，其中$W_0$是$B$属于特征值 0 的特征子空间。

证：对线性空间$W$的维数$r$进行第二数学归纳：

当$r = 1$时，结论显然成立。

假设对维数小于$r$的线性空间结论成立，那么$\dim W/W_0 = \dim W - \dim W_0 < r$，因此$B$在$W/W_0$上的诱导变换满足归纳假设，因此$W/W_0$能分解成$\dim W/W_0$个强循环子空间的直和，设这些强循环子空间分别为$\langle B^{t_i-1}\eta_i, ..., B\eta_i, \eta_i \rangle (i = 1, 2, ..., \dim W/W_0)$，则任取$i \in \{1, 2, ..., \dim W/W_0\}$，则存在$w_i \in W$使得$w_i + W_0 = \eta_i$，又由于$B^{t_i-1}\eta_i \neq 0, B^t\eta_i = 0$，因此$B^{t_i-1}w_i \neq 0, B^t w_i = 0$，因此$\langle B^{t_i-1}w_i, ..., Bw_i, w_i \rangle$是由$w_i$生成的一个强循环子空间，并且该强循环子空间与由$\eta_i$生成的强循环子空间同构，因此由这些强循环子空间组成的集合$\{\langle B^{t_1-1}w_1, ..., Bw_1, w_1 \rangle, ..., \langle B^{t_{\dim W/W_0}-1}w_{\dim W/W_0}, ..., Bw_{\dim W/W_0}, w_{\dim W/W_0} \rangle\}$是由$\{\langle B^{t_1-1}\eta_1, ..., B\eta_1, \eta_1 \rangle, ..., \langle B^{t_{\dim W/W_0}-1}\eta_{\dim W/W_0}, ..., B\eta_{\dim W/W_0}, \eta_{\dim W/W_0} \rangle\}$通过商映射得到的集合，因此$\{\langle B^{t_1-1}w_1, ..., Bw_1, w_1 \rangle, ..., \langle B^{t_{\dim W/W_0}-1}w_{\dim W/W_0}, ..., Bw_{\dim W/W_0}, w_{\dim W/W_0} \rangle\}$线性无关，因此$W_1 = \langle B^{t_1-1}w_1, ..., Bw_1, w_1 \rangle \oplus ... \oplus \langle B^{t_{\dim W/W_0}-1}w_{\dim W/W_0}, ..., Bw_{\dim W/W_0}, w_{\dim W/W_0} \rangle$是$B$的一个不变子空间，且$B|_{W_1}$的矩阵表示为分块对角矩阵$\begin{pmatrix} J_{t_1}(0) & \dots \\ \dots & J_{t_{\dim W/W_0}}(0) \end{pmatrix}$，又$W/W_0 = W_1/W_0 \oplus W_2/W_0$，因此$W = W_1 \oplus W_2$，又$W_0$是$B$的一个不变子空间，因此$W_2$也是$B$的一个不变子空间，且$B|_{W_2}$的诱导变换满足归纳假设，因此$W_2$能分解成$\dim W_2$个强循环子空间的直和，因此$W$能分解成$\dim W_0$个强循环子空间的直和。

有了强循环子空间分解定理，我们就可以得到幂零变换的约当标准形了。

**定理 3.8.2**（幂零变换的约当标准形）设$B$是域$F$上$r$维线性空间$W$上的一个幂零变换，幂零指数为$l$，则存在$W$的一组基使得$B|_W$的矩阵表示为分块对角矩阵，其中每个对角块都是一个约当块$J(0)$，且级数不超过$l$。约当块总数为$\dim KerB = r - rankB$；$t$级约当块的个数为

$$N(t) = rankB^{t+1} + rankB^{t-1} - 2rankB^t$$

证：设$W_0$是$B$属于特征值0的特征子空间，则$W_0 = KerB$，又$\dim W/W_0 = \dim W - \dim W_0 = r - rankB$，因此强循环子空间的个数为$r - rankB$，又每个强循环子空间的维数不超过$l$，因此每个强循环子空间的矩阵表示为一个约当块$J(0)$，且级数不超过$l$。设$t$级约当块的个数为$N(t)$，则$t$级约当块贡献了$tN(t)$维，因此$r = rankB^t + tN(t) + \sum_{s=t+1}^{l} sN(s)$，又$t-1$级约当块贡献了$(t-1)N(t-1)$维，因此$r = rankB^{t-1} + (t-1)N(t-1) + \sum_{s=t}^{l} sN(s)$，又$t+1$级约当块贡献了$(t+1)N(t+1)$维，因此$r = rankB^{t+1} + (t+1)N(t+1) + \sum_{s=t+2}^{l} sN(s)$，因此$rankB^t + tN(t) + \sum_{s=t+1}^{l} sN(s) = rankB^{t-1} + (t-1)N(t-1) + \sum_{s=t}^{l} sN(s) = rankB^{t+1} + (t+1)N(t+1) + \sum_{s=t+2}^{l} sN(s)$，因此$N(t) = rankB^{t+1} + rankB^{t-1} - 2rankB^t$。

## 3.9 线性变换的约当标准形

**定理 3.9.1**（由最小多项式确定约当标准形）设$A$是域$F$上$n$维线性空间$V$上的一个线性变换，设$A$的最小多项式在$F[\lambda]$上分解成不等的互素多项式的积$m(\lambda) = m_1(\lambda)m_2(\lambda)...m_s(\lambda)$，其中$m_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{l_i}$，则存在$V$的一组基使得$A|_V$的矩阵表示为分块对角矩阵，其中每个对角块都是一个约当块$J(\lambda_i)$，且级数不超过$l_i$。主对角元为$\lambda_i$的约当块总数为

$$N_i = n - rank(\lambda_i I - A)$$

其中$t$级约当块的个数为

$$N_i(t) = rank(\lambda_i I - A)^{t+1} + rank(\lambda_i I - A)^{t-1} - 2rank(\lambda_i I - A)^t$$

证：设$W_j = Ker\left(\lambda_j I - A\right)^{l_j}$，则$V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_s$，又$A|_{W_j} - \lambda_j I$是幂零变换，幂零指数为$l_j$，因此存在$W_j$的一组基使得$A|_{W_j}$的矩阵表示为分块对角矩阵，其中每个对角块都是一个约当块$J\left(\lambda_j\right)$，且级数不超过$l_j$。设主对角元为$\lambda_i$的约当块总数为$N_i$，则主对角元为$\lambda_i$的约当块贡献了$N_i$维，因此$rank(\lambda_i I - A) = n - N_i$，因此主对角元为$\lambda_i$的约当块总数为$N_i = n - rank(\lambda_i I - A)$。设$t$级约当块的个数为$N_i(t)$，则$t$级约当块贡献了$tN_i(t)$维，因此$r = n = rank(\lambda_i I - A) + \sum_{s=1}^{l} sN_i(s)$，又$t-1$级约当块贡献了$(t-1)N_i(t-1)$维，因此$r = n = rank(\lambda_i I - A) + \sum_{s=1}^{t-2} sN_i(s) + (t-1)N_i(t-1) + \sum_{s=t}^{l} sN_i(s)$，又$t+1$级约当块贡献了$(t+1)N_i(t+1)$维，因此$r = n = rank(\lambda_i I - A) + \sum_{s=1}^{t} sN_i(s) + (t+1)N_i(t+1) + \sum_{s=t+2}^{l} sN_i(s)$，因此$rank(\lambda_i I - A) + \sum_{s=1}^{l} sN_i(s) = rank(\lambda_i I - A) + \sum_{s=1}^{t-2} sN_i(s) + (t-1)N_i(t-1) + \sum_{s=t}^{l} sN_i(s) = rank(\lambda_i I - A) + \sum_{s=1}^{t} sN_i(s) + (t+1)N_i(t+1) + \sum_{s=t+2}^{l} sN_i(s)$，因此$N_i(t) = rank(\lambda_i I - A)^{t+1} + rank(\lambda_i I - A)^{t-1} - 2rank(\lambda_i I - A)^t$。

由于复数域中的多项式总是可以分解成一次因式之积，因此复数域上线性变换总是有约当标准形。那么，根据前面几节的讨论，我们有如下推论：

推论 **3.9.1**（有约当标准形的充要条件）域$F$上$n$维线性空间$V$上的一个线性变换$A$有约当标准形当且仅当$A$的最小多项式在$F[\lambda]$上可以分解成一次因式之积。

证：

$\Rightarrow$：设$A$有约当标准形，则$A$在$V$的一组基下的矩阵表示为分块对角矩阵，其中每个对角块都是一个约当块$J(\lambda_i)$，因此$A$的最小多项式在$F[\lambda]$上分解成一次因式之积。

$\Leftarrow$：设$A$的最小多项式在$F[\lambda]$上分解成一次因式之积$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{l_1}(\lambda-\lambda_2)^{l_2}...(\lambda-\lambda_s)^{l_s}$，其中$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s$是$A$的全部特征值，则存在$V$的一组基使得$A|_V$的矩阵表示为分块对角矩阵，其中每个对角块都是一个约当块$J(\lambda_i)$，因此$A$有约当标准形。

推论 **3.9.2**（有约当标准形的充要条件）域$F$上$n$维线性空间$V$上的一个线性变换$A$有约当标准形当且仅当$A$的特征多项式在$F[\lambda]$上可以分解成一次因式之积。

证：由于最小与特征多项式同根，立证。

我们发现，线性变换的约当标准形是由线性变换的最小多项式决定的，由此我们引出概念：初等因子。

定义 **3.9.1**（初等因子）域$F$上$n$级矩阵$A$若有约当标准形$J$，则称$J$的所有对角块的最小多项式为$A$的初等因子。

至此，我们从线性变换的视角回到了第一章矩阵视角，并自然地串联了起来。由此也可见，dyw 老师的顺序其实比 zyf 老师更合理。

综上，在前三章（期中考察内容）中，我们围绕着“求任意线性变换在一组基下最简单的矩阵表示”这一个核心问题，从线性映射出发，先是抽象地研究线性空间的结构与性质，然后借助基与坐标把抽象对象转化为矩阵问题，并证明了线性变换在不同基下的矩阵相似。而最简单的矩阵是对角矩阵，因此我们研究了线性变换的特征值与特征向量，得到了可对角化的充要条件。最后，我们引入了约当块与约当标准形，来研究不可对角化的线性变换的最简单矩阵表示。

具体来说，给定一个线性变换$A$，我们首先求出$A$的最小多项式$m(\lambda)$，如果$m(\lambda)$在$F[\lambda]$上分解成不等的一次因式之积，那么$A$可对角化，我们就可以得到$A$的一个对角矩阵表示；如果$m(\lambda)$在$F[\lambda]$上分解成一次因式之积，但存在重根，那么$A$不可对角化，我们可以得到$A$的一个约当标准形；如果$m(\lambda)$在$F[\lambda]$上不能分解成一次因式之积，那么$A$不可对角化，我们无法得到$A$的一个约当标准形。

## 3.10 作业

### zyf 班作业

### dyw 班作业

【作业 1】证明如果$\dim V = 1$且$T$是$V$上的线性变换，那么存在$\lambda \in F$使得对所有$v \in V$有$Tv = \lambda v$。

证: 设$\alpha$是$V$的一组基, 则任取$v \in V$, 则存在唯一的标量$a \in F$使得$v = a\alpha$, 因此$Tv = T(a\alpha) = aT\alpha$，又由于$T\alpha \in V$，因此存在唯一的标量$\lambda \in F$使得$T\alpha = \lambda\alpha$，因此$Tv = a\lambda\alpha = \lambda(a\alpha) = \lambda v$。

【作业 2】假设$W$是有限维的，且$T \in Hom(V, W)$。证明$T$是单射当且仅当存在$S \in Hom(W, V)$使得$ST = I_V$，其中$I_V$是$V$上的恒等映射。

证:

$\Leftarrow$: 只需证$KerT = \{0\}$，而$S(T(v)) = S(0) = 0 = v$，故$T(v) = 0 \Rightarrow v = 0$，因此$KerT = \{0\}$

$\Rightarrow$: 由于$W$有限维，$T$为单射，则$\dim V \leq \dim W < \infty$，因此取$V$一组基$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$，则$T(\alpha_1), T(\alpha_2), ..., T(\alpha_n)$线性无关, 因此可以扩展成$W$的一组基$T(\alpha_1), ..., T(\alpha_n), w_{n+1}, ..., w_m$, 定义线性映射

$$S : W \to V$$
$$S(T(\alpha_i)) = \alpha_i (i = 1, 2, ..., n)$$
$$S(w_j) = 0 (j = n+1, n+2, ..., m)$$

则任取$v = \sum_{i=1}^n a_i\alpha_i \in V$，有$S(T(v)) = \sum_{i=1}^n a_i S(T(\alpha_i)) = \sum_{i=1}^n a_i\alpha_i = v$，因此$ST = I_V$。

【作业 3】设$U, V$是有限维线性空间，且$S \in Hom(V, W), T \in Hom(U, V)$，证明:

$$\dim Ker(ST) \leq \dim KerS + \dim KerT$$

证：若$T(v) = 0$，则$S(T(v)) = S(0) = 0$，因此$v \in KerS$，故$Ker(T) \subseteq Ker(ST)$。设$KerT$的一组基为$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$，则可以扩充成$Ker(ST)$的一组基$\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_{m+1}, ..., \beta_n$，所以$T(\beta_{m+1}), ..., T(\beta_n)$线性无关且$\in KerS$，则

$$\dim KerS \geq n - m = \dim Ker(ST) - \dim KerT$$

因此

$$\dim Ker(ST) \leq \dim KerS + \dim KerT$$

【作业 4】假设$W$是有限维的，且$S,T \in Hom(V,W)$。证明：$KerS \subseteq KerT \Leftrightarrow$存在$E \in Hom(W,W)$使得$T = ES$。

证:

$\Leftarrow$: 任取$v \in KerS$，则$T(v) = E(S(v)) = E(0) = 0$，因此$v \in KerT$，故$KerS \subseteq KerT$。

$\Rightarrow$: 取$ImS$的一组基$w_1, ..., w_k$，扩充成$W$的一组基$w_1, ..., w_k, u_1, ..., u_m$，对于每个$w_i$，存在$v_i \in V$使得$S(v_i) = w_i$，定义线性映射

$$E : W \to W$$
$$E(w_i) = T(v_i)(i = 1, ..., k)$$
$$E(u_j) = 0(j = 1, ..., m)$$

则任取$v \in V$，有$S(v) = \sum_{i=1}^{k} a_i w_i$，则

$$E(S(v)) = \sum_{i=1}^{k} a_i E(w_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i T(v_i)$$

，而$S(v) = \sum_{i=1}^{k} a_i w_i = S\left(\sum_{i=1}^{k} a_i v_i\right)$，则$v - \sum_{i=1}^{k} a_i v_i \in KerS$因此

$$T(v) = T\left(\sum_{i=1}^{k} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i T(v_i)$$

因此$T = ES$。

【作业 5】记次数不超过$n$的实系数多项式空间为$R[x]_n$，定义线性映射$D : R[x]_3 \to R[x]_2$为$Df(x) = f'(x)$，分别求$R[x]_3, R[x]_2$的一组基，使得$D$在这两组基下的矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

解：设$R[x]_3$一组基为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$，取$R[x]_2$的一组基为$1, x, x^2$，则

$$D(\alpha_1) = 1$$
$$D(\alpha_2) = x$$
$$D(\alpha_3) = x^2$$
$$D(\alpha_4) = 0$$

则

$$\alpha_1 = x, \alpha_2 = \frac{1}{2}x^2, \alpha_3 = \frac{1}{3}x^3, \alpha_4 = 1$$

因此$D$在这两组基下的矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

【作业 6】设$\varphi, \beta \in Hom(V, F)$，证明：$Ker\varphi \subseteq Ker\beta \Leftrightarrow$存在$c \in F$使得$\beta = c\varphi$。

证：

$\Leftarrow$：任取$v \in Ker\varphi$，则$\beta(v) = c\varphi(v) = c * 0 = 0$，因此$v \in Ker\beta$，故$Ker\varphi \subseteq Ker\beta$。

$\Rightarrow$：取$Im\varphi$的一组基$w_1, ..., w_k$，则存在$v_1, ..., v_k \in V$使得$\varphi(v_i) = w_i$，定义线性映射

$$E : F \to F$$
$$E(w_i) = \beta(v_i)(i = 1, ..., k)$$

则任取$v \in V$，有$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{k} a_i w_i$，则

$$E(\varphi(v)) = \sum_{i=1}^{k} a_i E(w_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i \beta(v_i)$$

，而$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{k} a_i w_i = \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} a_i v_i\right)$，则$v - \sum_{i=1}^{k} a_i v_i \in Ker\varphi$因此

$$\beta(v) = \beta\left(\sum_{i=1}^{k} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i \beta(v_i)$$

因此存在$c \in F$使得$\beta = c\varphi$。

【作业 7】设$V$是域$F$上的一个有限维线性空间，$A$是$V$上的一个线性变换，$W$是$V$的一个子空间，用$A^{-1}W$表示$W$在$A$下的原像集，证明：

- (1)$\dim W - \dim KerA \leq \dim AW \leq \dim W$
- (2)$A^{-1}W$是$V$的子空间，且$\dim A^{-1}W \leq \dim KerA + \dim W$
- (3)若$W \subseteq ImA$，则$\dim A^{-1}W \geq \dim W$

证：

- (1)考虑限制映射$A|_W : W \to V$，则$AW = Im(A|_W)$。由维数公式

$$\dim W = \dim Ker(A|_W) + \dim Im(A|_W) = \dim(W \cap KerA) + \dim AW$$

因此

$$\dim W - \dim KerA \leq \dim AW \leq \dim W$$

- (2)设$v_1, v_2 \in A^{-1}W$，则$A(v_1), A(v_2) \in W$。对于任意标量$c_1, c_2$，有$c_1 v_1 + c_2 v_2 \in V$，且$A(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 A(v_1) + c_2 A(v_2) \in W$，因此$c_1 v_1 + c_2 v_2 \in A^{-1}W$，即$A^{-1}W$是$V$的子空间。又考虑限制映射$A|_{A^{-1}W} : A^{-1}W \to V$，则$A(A^{-1}W) = Im(A|_{A^{-1}W}) \subseteq W$，因此

$$\dim A^{-1}W = \dim Ker(A|_{A^{-1}W}) + \dim Im(A|_{A^{-1}W}) \leq \dim KerA + \dim W$$

- (3)$Im(A|_{A^{-1}W}) = W \cap ImA, Ker(A|_{A^{-1}W})) = KerA$加上$W \subseteq ImA$以及维数公式，立得结论。

【作业 8】设$V$是域$F$上的一个$n$维线性空间，$A$是$V$上的一个线性变换，证明：存在正整数$m$使得$A^m V = A^{m+k} V \qquad k = 1,2,3,\dots$。

证：设 $A^k V = \{A^k v \mid v \in V\}$，则 $A^0 V = V, A^1 V = AV, A^2 V = A(AV), \dots, A^n V = A(A^{n-1} V)$，由于$V$是$n$维的，因此存在$0 \le m \le n$使得

$$\dim A^0 V \ge \dim A^1 V \ge \dim A^2 V \ge \dots \ge \dim A^m V = \dim A^{m+1} V$$

因此$A^m V = A^{m+k} V \qquad k = 1,2,3,\dots$

【作业 9】在$K^3$上取一个基$\alpha_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$；在$K^2$中取三个向量$\gamma_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \gamma_3 = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$，定义$K^3 \to K^2$的一个线性映射，使得$A\alpha_i = \gamma_i$。在$K^2$上取一组基$\eta_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，求$A$在$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$和$\eta_1, \eta_2$这两组基下的矩阵表示。

解：由题得

$$\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$
$$\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\eta_1, \eta_2) A$$

因此

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

【作业 10】假设$V$是有限维的，且$U$是$V$的子空间。证明：$U = \{v \in V \mid \forall \varphi \in U^0, \varphi(v) = 0\}$

证：设$W = \{v \in V \mid \forall \varphi \in U^0, \varphi(v) = 0\}$，则$U \subseteq W$。又设$W$的一组基为$\alpha_1, \dots, \alpha_m$，则可以扩充成$V$的一组基$\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_{m+1}, \dots, \beta_n$，定义线性映射

$$E : V \to F$$
$$E(\alpha_i) = 0 (i = 1, \dots, m)$$
$$E(\beta_j) = \delta_{j-m} (j = m+1, \dots, n)$$

则任取 $v \in W$，有 $E(v) = \sum_{i=1}^m a_i E(\alpha_i) + \sum_{j=m+1}^n a_j E(\beta_j) = 0$，因此 $a_j = 0 (j = m+1, \dots, n)$，因此$v \in U$，因此$W \subseteq U$，综上得结论。

【作业 11】设$V$是有限维的，且$\varphi_1, \dots \varphi_m$是$V$的对偶空间$V'$中的一个线性无关组，证明：

$$\dim((Ker\varphi_1) \cap \dots \cap (Ker\varphi_m)) = \dim V - m$$

证：设$W = (Ker\varphi_1) \cap \dots \cap (Ker\varphi_m)$，则$W$是$V$的一个子空间。又设$W$的一组基为$\alpha_1, \dots, \alpha_k$，则可以扩充成$V$的一组基$\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m$，定义线性映射

$$E : V \to F^m$$
$$E(\alpha_i) = 0 (i = 1, \dots, k)$$
$$E(\beta_j) = \delta_{j (j=1, \dots, m)}$$

则任取$v \in V$，有$E(v) = \sum_{i=1}^{k} a_i E(\alpha_i) + \sum_{j=1}^{m} a_j E(\beta_j)$，因此$v \in W \Leftrightarrow E(v) = 0 \Leftrightarrow a_j = 0 (j = 1, ..., m)$，因此

$$\dim W = k = \dim V - m$$

【作业 12】证明或给出反例：若$V$是有限维的，且$U$是$V$的子空间，且在$V$上的每一个线性映射下都不变，则$U = \{0\} \vee U = V$

证：设$U$的一组基为$\alpha_1, ..., \alpha_m$，则可以扩充成$V$的一组基$\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ..., \beta_n$，定义线性映射

$$E : V \to V$$
$$E(\alpha_i) = 0 (i = 1, ..., m)$$
$$E(\beta_j) = \alpha_{j(j=1,...,n)}$$

则任取$u \in U$，有$E(u) = 0$，因此$E(U) \subseteq U$，又任取$v \in V - U$，有$E(v) \in U$，因此$E(V) \subseteq U$，因此$U = V$

证毕。

【作业 13】设$V$是域$F$上的一个有限维线性空间，$T$是$V$上的一个线性变换，且$U$是$V$的一个在$T$下的不变子空间，证明：

- (1)$T$的最小多项式是$T/U$的最小多项式的倍式
- (2)$T/U$的最小多项式与$T|_U$的最小多项式之积是$T$的最小多项式的倍式

证：

- (1) $\forall f(x) \in F[x]$，若$f(T) = 0$，则$\forall v \in V, f(T/U)(v + U) = f(T)v + U = U$，因此$f(T/U) = 0$，即$f(x)$是$T/U$的零化多项式，因此$T/U$的最小多项式整除$f(x)$。
- (2)令$f(\lambda) = m_{T/U}(\lambda) \cdot m_{T|_U}(\lambda)$，那么只需证明$f(T) = 0$。

1.任取$v \in V$，考虑商空间元素$v + U$，则$m_{T/U}(T)v + U = m_{T/U}(T/U)(v + U) = U$，这表明$\exists u \in U, s.t. \quad u = m_{T/U}(T)v$。

2.$\forall u \in U$，有$m_{T|_U}(T)u = m_{T|_U}(T|_U)u = 0$，因此$m_{T|_U}(T)u = 0$。

【作业 14】设$V$是域$F$上的一个有限维线性空间，$T$是$V$上的一个线性变换，且$U$是$V$的一个在$T$下的不变子空间，证明：$T$的特征值集合是$T|_U$的特征值集合与$T/U$的特征值集合的并集。

证：

1.由不变子空间的基本性质及上题(1)，$m_{T/U}(\lambda), m_{T|_U}(\lambda)$均整除$m_T(\lambda)$，又由定理3.7.3，$m_T(\lambda)$与$T$的特征多项式同根，因此$T$的特征值集合包含$T|_U$的特征值集合与$T/U$的特征值集合的并集。

2.由上题(2)，$m_T(\lambda) \mid \left(m_{T/U}(\lambda) \cdot m_{T|_U}(\lambda)\right)$，又由定理3.7.3，$m_T(\lambda)$与$T$的特征多项式同根，因此$T$的特征值集合包含$T|_U$的特征值集合与$T/U$的特征值集合的并集。

综上得结论。

【作业 15】设$f_i(x), g_j(x) \in K[x], i=1,...,m, j=1,...,n$，证明：若$\gcd\big(f_i(x), g_j(x)\big)=1$，则$\gcd\Big(\prod_{i=1}^m f_i(x), \prod_{j=1}^n g_j(x)\Big)=1$。

证：设$F=\prod_{i=1}^m f_i(x), G=\prod_{j=1}^n g_j(x)$，若$\gcd(F,G)\neq 1$，则存在不可约多项式$h(x)$使得$h(x)|F$且$h(x)|G$。则必存在$i_0, j_0$使得$h(x)|f_{i_0}(x)$且$h(x)|g_{j_0}(x)$，因此$\gcd\big(f_{i_0}(x), g_{j_0}(x)\big)\neq 1$，矛盾。

证毕。

【作业 16】证明：在$K[x]$中，对任意正整数$m$有

$$\gcd(f^m(x), g^m(x)) = \gcd(f(x), g(x))^m$$

证：设$f=j\cdot h, g=k\cdot h$，其中$j,k,h$均为多项式，且$\gcd(j,k)=1$。则$f^m=j^m\cdot h^m, g^m=k^m\cdot h^m$，因此$\gcd(f^m,g^m)=\gcd(j^m,k^m)\cdot h^m=\gcd(f,g)^m$。

证毕。

【作业 17】定义$R^3$到自身的映射$P_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$，$P_1$是一个线性变换，求最小多项式。

解：在$R^3$的标准基$e_1,e_2,e_3$下，有$P_1e_1=e_1, P_1e_2=e_2, P_1e_3=0$，因此$P_1$在标准基下的矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此$P_1$的最小多项式为

$$m(\lambda)=\lambda(\lambda-1)$$

【作业 18】设$A,B$分别是域$F$上$n,m$级矩阵，其最小多项式分别为$m_1(\lambda)$和$m_2(\lambda)$，证：若$m_1(\lambda), m_2(\lambda)$有公共的一次因式，那么矩阵方程$XA=BX$有非零解。

证：不妨设该相同的一次因式为$\lambda-c$，则$c$是$A$和$B$的公共特征值，而由于$|\lambda I-A|=|\lambda I-A^T|$，则$c$也是$A^T$的特征值，则存在$A^T$的特征向量$\alpha$和$B$的特征向量$\beta$使得$A^T\alpha=c\alpha$（即$\alpha^TA=c\alpha^T$），$B\beta=c\beta$，令$X=\beta\alpha^T$，则

$$XA=\beta\alpha^TA=\beta\left(A^T\alpha\right)^T=c\beta\alpha^T=cX$$
$$BX=B\beta\alpha^T=c\beta\alpha^T=\beta(A\alpha)^T=c\beta\alpha^T=cX$$

因此$X$是矩阵方程$XA=BX$的一个非零解。

【作业 19】设$A$是域$F$上$n$维线性空间$V$上的一个线性变换，且$A$的特征多项式$f(\lambda)$在$F[\lambda]$上分解成一次因式之积，证明：若$\lambda_1$是$A$的$r_1$重特征值，则

$$rank(A-\lambda_1 I)^{r_1}=n-r_1$$

证：由定理 3.2.3（即秩-零化度定理）得

$$\dim Ker(A-\lambda_1 I)^{r_1}+\dim Im(A-\lambda_1 I)^{r_1}=n$$

因此只需证明

$$\dim Ker(A-\lambda_1 I)^{r_1}=r_1$$

设$A$的互异特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s$，其代数重数分别为$r_1,r_2,\ldots,r_s$，则

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$$

且$\sum_{i=1}^{s}r_i=n$。由准素分解定理（定理 3.6.8）得

$$V=W_1\oplus W_2\oplus\ldots\oplus W_s$$

其中$W_i=Ker(A-\lambda_i I)^{r_i}$。

取与上述直和分解相适配的一组基，则$A$在该基下为分块对角矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

其中$A_i=A|_{W_i}$。因而$A$的特征多项式满足

$$f(\lambda)=f_{A_1}(\lambda)f_{A_2}(\lambda)\ldots f_{A_s}(\lambda)$$

又由$W_i=Ker(A-\lambda_i I)^{r_i}$可知$(A_i-\lambda_i I)^{r_i}=0$，故$N_i=A_i-\lambda_i I$是幂零变换， 从而$A_i=\lambda_i I+N_i$。设$m_i=\dim W_i$，由幂零变换的约当标准形可知，存在$W_i$的一组基使得$N_i$在该基下为严格上三角矩阵（主对角元全为0），因此$A_i=\lambda_i I+N_i$在该基下为上三角矩阵，且主对角元全为$\lambda_i$。于是

$$f_{A_i}(\lambda)=|\lambda I-A_i|=|(\lambda-\lambda_i)I-N_i|=(\lambda-\lambda_i)^{m_i}=(\lambda-\lambda_i)^{\dim W_i}$$

因此

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{\dim W_1}(\lambda-\lambda_2)^{\dim W_2}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{\dim W_s}$$

与

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$$

比较各因子指数可得$\dim W_i=r_i(1\leq i\leq s)$，特别地$\dim Ker(A-\lambda_1 I)^{r_1}=r_1$。故

$$rank(A-\lambda_1 I)^{r_1}=n-\dim Ker(A-\lambda_1 I)^{r_1}=n-r_1$$

【作业 20】设$B$是域$F$上$n$维线性空间$V$上的幂零变换，证：若$B$有两个线性无关的特征向量，则$B$的幂零指数$l<n$。

证：由于$B$是幂零变换，故其唯一特征值为0，因此$B$的特征向量恰是$KerB$中的非零向量。题设$B$有两个线性无关的特征向量，故$\dim KerB\geq 2$。

设$l$为$B$的幂零指数，则$B^l=0,B^{l-1}\neq 0$。于是存在$\alpha\in V$使$B^{l-1}\alpha\neq 0$。 与【N1】同理可证$\alpha,B\alpha,...,B^{l-1}\alpha$线性无关，记

$$U=\langle\alpha,B\alpha,...,B^{l-1}\alpha\rangle$$

，则$\dim U=l$。

又$B\left(B^{l-1}\alpha\right)=0$，故$B^{l-1}\alpha\in KerB$；而当$0\leq j\leq l-2$时，

$$B\left(B^j\alpha\right)=B^{j+1}\alpha\neq 0$$

，故$B^j\alpha\notin KerB$。 因此$U\cap KerB=\langle B^{l-1}\alpha\rangle$，从而$\dim(U\cap KerB)=1$。

由$\dim KerB\geq 2$，可取$\beta\in KerB$且$\beta\notin U$。于是

$$\beta,\alpha,B\alpha,...,B^{l-1}\alpha$$

线性无关，共有$l+1$个向量，故$l+1\leq n$，即$l<n$。

【作业 21】求

$$\begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}$$

的约当标准形。

解：设$A=\begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}$。先求特征多项式:

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix}\lambda-3&0&-8\\-3&\lambda+1&-6\\2&0&\lambda+5\end{pmatrix}\right|$$

$$=(\lambda+1)\left|\begin{pmatrix}\lambda-3&-8\\2&\lambda+5\end{pmatrix}\right|=(\lambda+1)((\lambda-3)(\lambda+5)+16)=(\lambda+1)^3$$

故$A$只有一个特征值$\lambda=-1$，其代数重数为3。

再求几何重数:

$$A+I=\begin{pmatrix}4&0&8\\3&0&6\\-2&0&-4\end{pmatrix}$$

其中三行互为倍数，故$rank(A+I)=1$， 从而

$$\dim Ker(A+I)=3-1=2$$

因此$\lambda=-1$对应的约当块个数为2。

由于总代数重数为3，且约当块个数为2，故约当块级数只能是2和1。 所以$A$的约当标准形为

$$J=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

【作业 22】设域$F$上$n$级矩阵$A$有约当标准形，证：$A$可对角化当且仅当对于每个特征值$\lambda_i$，有$rank(A-\lambda_i I)^2=rank(A-\lambda_i I)$

证：设$A$的约当标准形为$J=P^{-1}AP$。由相似不改变秩，对任意特征值$\lambda_i$有

$$rank\Big((A-\lambda_i I)^2\Big)=rank\Big((J-\lambda_i I)^2\Big),rank(A-\lambda_i I)=rank(J-\lambda_i I)$$

故只需对$J$证明结论。

$\Rightarrow$: 若$A$可对角化，则$J$为对角矩阵。于是$J-\lambda_i I$仍为对角矩阵，且其平方只会把非零对角元平方，零元位置不变，所以

$$rank\Big((J-\lambda_i I)^2\Big)=rank(J-\lambda_i I)$$

从而

$$rank\Big((A-\lambda_i I)^2\Big)=rank(A-\lambda_i I)$$

对每个$\lambda_i$成立。

$\Leftarrow$: 反设对每个特征值$\lambda_i$都有

$$rank\Big((A-\lambda_i I)^2\Big)=rank(A-\lambda_i I)$$

等价地，对$J$也有

$$rank\Big((J-\lambda_i I)^2\Big)=rank(J-\lambda_i I)$$

固定$i$。设$\lambda_i$对应的约当块为$J_{t_1}(\lambda_i),\dots,J_{t_m}(\lambda_i)$。则在$J-\lambda_i I$中它们变为$J_{t_1}(0),\dots,J_{t_m}(0)$；而其余$\lambda_j(j\neq i)$对应块变为$J_s(\lambda_j-\lambda_i)$，这些块都可逆，故其秩与平方的秩相同。

对于块$J_t(0)$：当$t=1$时，$rankJ_t(0)=rank(J_t(0)^2)=0$；当$t\geq 2$时，$rankJ_t(0)=t-1,rank(J_t(0)^2)=t-2$，两者相差1。因而

$$rank(J-\lambda_i I)-rank\Big((J-\lambda_i I)^2\Big)$$

恰等于$\lambda_i$对应的级数$\geq 2$的约当块个数。

由题设该差为0，故$\lambda_i$对应不存在级数$\geq 2$的约当块，即$\lambda_i$对应的约当块全为1级。由于$i$任意，对每个特征值都如此，故$J$为对角矩阵，从而$A$可对角化。

## 3.10 补充练习

## 3.11 一些疑惑与解答

【N1】为什么幂零指数$l$不超过空间维数$r$?

证：由题，$B^l=0,B^{l-1}\neq 0$，从而存在$\alpha\in V$使得$B^{l-1}\alpha\neq 0$，设

$$k_0\alpha+k_1B\alpha+...+k_{l-1}B^{l-1}\alpha=0$$

两边同乘$B^{l-1}$，得$k_0=0$，递推得$k_i=0$，因此$\alpha,B\alpha,...,B^{l-1}\alpha$是$V$的一组线性无关的向量，因此$l\leq r$。

【N2】$T/U$为何意?

解：首先，我们知道有标准映射$\pi:V\rightarrow V/U$，定义为$\pi(v)=v+U$，又由于$U$在$T$下不变，因此存在唯一的线性映射$T/U:V/U\rightarrow V/U$使得$(T/U)(v+U)=Tv+U$，因此$T/U$是一个线性变换。至于几何意义，$T/U$可以看作是$T$在商空间$V/U$上的一个投影。

【N3】为什么$|\lambda I-A|=\left|\lambda I-A^T\right|$?

证：转置不改变行列式的值，因此$|\lambda I-A|=\left|(\lambda I-A)^T\right|=\left|\lambda I-A^T\right|$。

# 四 · 期中复习

## 4.1 21 春期中真题

【T1】（15 分）设数域$K$上 4 维线性空间的两组基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$和$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$满足

$$\beta_3=\alpha_1-2\alpha_2,\beta_4=\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3=\beta_1+2\beta_2,\alpha_4=\beta_2+2\beta_3$$

求从基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的过渡矩阵并求向量$\alpha=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4$在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$下的坐标。

解：设过渡矩阵为$A$，则

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)A$$

而由题得

$$\alpha_1=-4\beta_1-8\beta_2+\beta_3+2\beta_4,\alpha_2=-2\beta_1-4\beta_2+\beta_4$$

那么

$$A=\begin{pmatrix}-4&-2&1&0\\-8&-4&2&1\\1&0&0&2\\2&1&0&0\end{pmatrix}$$

而

$$\alpha=-5\beta_1-6\beta_2+9\beta_3+4\beta_4$$

则$\alpha$在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$下的坐标为$\begin{pmatrix}-5\\-6\\9\\4\end{pmatrix}$。

评：

- 正误判断：你求出的矩阵$A$错误。题中要求的是“从基$\alpha$到基$\beta$的过渡矩阵”（即满足$(\beta)=(\alpha)P$的$P$），而你求出的$A$满足$(\alpha)=(\beta)A$，是反过渡矩阵。坐标计算$\begin{pmatrix}-5\\-6\\9\\4\end{pmatrix}$恰好正确，但过渡矩阵本身写反了。
- 标准解答：由条件解出$\beta_i$用$\alpha_i$表示：

$$\begin{cases}\beta_3=\alpha_1-2\alpha_2\\\beta_4=\alpha_2+2\alpha_3\\\beta_2=\alpha_4-2\beta_3=-2\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_4\\\beta_1=\alpha_3-2\beta_2=4\alpha_1-8\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_4\end{cases}$$

故过渡矩阵

$$P=\begin{pmatrix}4&-2&1&0\\-8&4&-2&1\\1&0&0&2\\-2&1&0&0\end{pmatrix}$$

$\alpha=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4$在基$\beta$下的坐标$X$满足$PX=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，解得$X=\begin{pmatrix}-5\\-6\\9\\4\end{pmatrix}$。

- 方法评价：你解出$\alpha_i$用$\beta_i$表示的思路可行，但必须严格区分"$\alpha$到$\beta$"与"$\beta$到$\alpha$"的过渡矩阵方向。通法是直接求解$\beta_i$的线性表示，代入写出矩阵，不易混淆。

【T2】（15 分）设$M_3(R)$的子空间

$$W_1=\begin{pmatrix}a&0&c\\a&0&0\\c&b&0\end{pmatrix},W_2=\begin{pmatrix}x&0&0\\0&y&0\\0&z&z\end{pmatrix}$$

求$W_1+W_2$并判断其是否为直和，再求子空间$W_3$使得$M_3(R)=(W_1+W_2)\oplus W_3$

解：

$$W_1\cap W_2=\left\{\begin{pmatrix}x_1&0&0\\0&0&0\\0&x_2&0\end{pmatrix}\right\}\neq\{0\}$$

故不是直和。而

$$W_1+W_2=\left\{\begin{pmatrix}y_1&0&y_2\\y_3&y_4&0\\y_2&y_5&y_6\end{pmatrix}\right\}=\langle E_{11},E_{21},E_{22},E_{32},E_{33},E_{13}+E_{31}\rangle$$

则取

$$W_3=\langle E_{12},E_{23},E_{31}\rangle=\left\{\begin{pmatrix}0&a&0\\0&0&b\\c&0&0\end{pmatrix}\right\}$$

可使得$M_3(R)=(W_1+W_2)\oplus W_3$

评：

- 正误判断：交空间$W_1\cap W_2$求错，导致"不是直和"的结论错误。$W_1+W_2$的基与$W_3$的构造正确。
- 标准解答：设$M\in W_1\cap W_2$，则同时有形式

$$M=\begin{pmatrix}a&0&c\\a&0&0\\c&b&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&0&0\\0&y&0\\0&z&z\end{pmatrix}$$

比较各元素：由$(2,1)$得$a=0$；$(2,2)$得$y=0$；$(3,3)$得$z=0$；$(3,2)$得$b=0$；$(1,3)$得$c=0$。因此$M=0$，即$W_1\cap W_2=\{0\}$，从而是直和。$W_1+W_2$的一组基为$E_{11},E_{21},E_{22},E_{32},E_{33},E_{13}+E_{31}$，取$W_3=\langle E_{12},E_{23},E_{31}\rangle$即可使$M_3(R)=(W_1+W_2)\oplus W_3$。

- 方法评价：方法正确：求交、求基、找补空间。失误纯粹是解交时忽略了矩阵元素的全部约束。务必逐位置建立方程并完整求解。

【T3】（20 分）设$C=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$，定义$M_2(R)$上的线性变换$A(B)=BC-CB,\forall B\in M_2(R)$

- (1)分别求$ImA$和$KerA$的维数以及各一组基
- (2)求$M_2(R)$的一组基使得$A$在该基下的矩阵为对角矩阵

解：设$B=\begin{pmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{pmatrix}=(E_{11}\ \ E_{12}\ \ E_{21}\ \ E_{22})\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}$，而

$$BC-CB=\begin{pmatrix}-2a_3&2a_1+2a_2-2a_4\\-2a_3&2a_3\end{pmatrix}=(E_{11}\ \ E_{12}\ \ E_{21}\ \ E_{22})\begin{pmatrix}-2a_3\\2a_1+2a_2-2a_4\\-2a_3\\2a_3\end{pmatrix}$$

则$\mathcal{A}$在基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$下的矩阵为

$$\mathcal{A}(E_{11}\ \ E_{12}\ \ E_{21}\ \ E_{22})=(E_{11}\ \ E_{12}\ \ E_{21}\ \ E_{22})A$$

$$(E_{11}\ \ E_{12}\ \ E_{21}\ \ E_{22})\begin{pmatrix}-2a_3\\2a_1+2a_2-2a_4\\-2a_3\\2a_3\end{pmatrix}=\mathcal{A}(E_{11}\ \ E_{12}\ \ E_{21}\ \ E_{22})\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}$$

则

$$A=\begin{pmatrix}0&0&-2&0\\2&2&0&-2\\0&0&-2&0\\0&0&2&0\end{pmatrix}$$

- (1)$ImA=\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\rangle$，由$AX=0$得$\begin{cases}x_3=0\\x_1+x_2=x_4\end{cases}$，$KerA=\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\rangle$，则$\dim ImA=2,\dim KerA=2$
- (2)只需对$A$对角化，

1.求特征值：$f(\lambda)=\lambda^2(\lambda-2)(\lambda+2)$则$\lambda=0,2,-2$

2.对每个特征值求特征向量：

- $\lambda=0$时，$AX=0$得$\begin{cases}x_3=0\\x_1+x_2=x_4\end{cases}$，因此$\lambda=0$对应的特征向量为$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$；
- $\lambda=2$时，$AX=2X$得$x_1=x_3=x_4=0$，因此$\lambda=2$对应的特征向量为$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$；

- $\lambda=-2$时，$AX=-2X$得$\begin{cases}x_3=x_1\\-x_1=x_2=x_4\end{cases}$，因此$\lambda=-2$对应的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$；

综上，$A$在基$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$下的矩阵为 $D=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$且$P=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&-1\\0&0&0&1\\1&1&0&-1\end{pmatrix}$此时$P^{-1}AP=D$

此时$M_2(R)$的一组基为$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$

评：

- 正误判断：全部正确。像、核的基与维数，对角化的基均无误。
- 标准解答：取基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$，线性变换$\mathcal{A}$的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&0&-2&0\\2&2&0&-2\\0&0&-2&0\\0&0&2&0\end{pmatrix}$$

(1)$ImA$的基对应$A$的列空间，可取$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\dim=2$；$KerA$解$AX=0$得$x_3=0,x_1+x_2=x_4$，基为$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$，$\dim=2$。 (2)特征值0（代数重数 2），2，$-2$。取特征向量构成矩阵

$$P=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&-1\\0&0&0&1\\1&1&0&-1\end{pmatrix}$$

，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$。对应$M_2(R)$的基为$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$。

- 方法评价：转化为矩阵在标准基下的表示，再求像、核、对角化，是处理线性变换的标准通法，最优。

【T4】（20 分）设$Q$上的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&3\\0&1&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-2&4&-1\\1&0&4\end{pmatrix}$$

- (1)求一个次数不超过 2 的多项式$g(x)\in Q[x]$使得$B=g(A)$
- (2)求一个次数不超过 2 的多项式$h(x)\in Q[x]$使得$h(A)B=I$

解：

- (1)设$g(x)=ax^2+bx+c$，则$B=g(A)$等价于$B=aA^2+bA+cI$，计算得$\begin{cases}a=1\\b=2\\c=3\end{cases}$

- (2)设$h(x)=dx^2+ex+f$，则$h(A)B=I$等价于$h(A)B=I$，计算得$\begin{cases} d=-\frac{4}{9} \\ e=\frac{7}{9} \\ f=\frac{16}{9} \end{cases}$

评：

- 正误判断：(1)错误，解的系数不满足方程。(2)正确。
- 标准解答：(1)设$g(x)=ax^2+bx+c$，计算

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

由$g(A)=B$得方程组，解得$a=1,b=-2,c=1$，故$g(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$。

(2)设$h(x)=dx^2+ex+f$，由$h(A)B=I$可解出$d=-\frac{4}{9},e=\frac{7}{9},f=\frac{16}{9}$，即$h(x)=-\frac{4}{9}x^2+\frac{7}{9}x+\frac{16}{9}$。（可利用$B=(A-I)^2$简化计算）

- 方法评价：待定系数法通用，但计算时易出错。若能利用$B$的表达式进行多项式求逆，会更简洁；直接解方程组也是通法，但必须仔细验算。

【T5】（20 分）设$R$上的 4 维列向量空间$R^4$的四个向量分别为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

设$R^4$上的线性变换$A$满足$A\alpha_1=\alpha_2, ImA=\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle, KerA=\langle\alpha_3,\alpha_4\rangle$

- (1)证明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$V=\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle$是$A$-不变子空间并求$A|_V$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的矩阵表示
- (2)求$A$的特征多项式

解:

- (1)

设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，则$k_1=k_2=k_3=0$，故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关。

任取$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3\in V$，则$A\alpha=k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+k_3A\alpha_3=k_1\alpha_2+k_2A\alpha_2$，又$\alpha_2\in ImA$，故$V$是$A$-不变子空间。

设$A|_V$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的矩阵表示为$M$，由题得$\begin{cases} A\alpha_1=\alpha_2 \\ A\alpha_2=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2 \\ A\alpha_3=0 \\ A\alpha_4=0 \end{cases}$而计算得$\alpha_4=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$代入得$A\alpha_2=2\alpha_2$则$(M\alpha_1,M\alpha_2,M\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)M=(\alpha_2,2\alpha_2,0)$则$M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- (2)由题得$(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3,A\alpha_4)=(\alpha_2,2\alpha_2,0,0)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)A$，故$A=()$，

评：

- 正误判断：(1)完全正确。(2)解答不完整且思路错误：用了线性相关的$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$充当基，未能得到特征多项式。
- 标准解答：(1)已得$V=\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle$是$A$-不变的，且$A|_V$在$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为

$$M=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

。

(2)因$ImA=\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle\subset V$，任取$\beta\notin V$扩充为$R^4$的基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$，则$A\beta\in V$。故$A$在该基下的矩阵形如

$$N=\begin{pmatrix}M&u\\0&0\end{pmatrix}$$

，$u\in R^3$。其特征多项式$f(\lambda)=\det(\lambda I-N)=\lambda\cdot\det(\lambda I_3-M)=\lambda\cdot\lambda^2(\lambda-2)=\lambda^3(\lambda-2)$。

- 方法评价：(1)的方法很好。(2)的通法是利用不变子空间将矩阵分块上三角化，这是求特征多项式的标准技术，避免用线性相关组当基。

【T6】（10 分）设$V_1,V_2$分别是数域$K$上的有限维线性空间，$A,B$都是$V_1$到$V_2$的线性映射且$KerA=KerB$，证明：存在$V_2$上的可逆线性变换$C$使得$B=CA$

证：设$\dim V_1=n,\dim V_2=m$，则$\mathcal{A},\mathcal{B}$在一组基下的矩阵表示各为$A_{m\times n},B_{m\times n}$，又$KerA=KerB$,则$AX=0$与$BX=0$同解，则与$\binom{A}{B}X=0$也同解，则$A,B$的行向量可以相互线性表出，即存在可逆矩阵$C$使得$B=CA$，因此存在$V_2$上的可逆线性变换$C$使得$B=CA$

评：

- 正误判断：证明思路基本正确，但不严密。“行向量可互相表出，故存在可逆矩阵$C$”缺乏可逆性的严格论证。
- 标准解答：因为$KerA=KerB$，由维数公式得$\dim ImA=\dim ImB=r$。取$ImA$的一组基$\{y_1,...,y_r\}$与$ImB$的一组基$\{z_1,...,z_r\}$，并分别扩充为$V_2$的基$y_1,...,y_r,y_{r+1},...,y_m$；$z_1,...,z_r,z_{r+1},...,z_m$。定义$C:V_2\to V_2$为$C(y_i)=z_i(i=1,...,m)$，则$C$可逆。现验证$B=CA$：任取$x\in V_1$，设$Ax=\sum_{i=1}^r a_iy_i$，则存在$x_0$使$Ax=Ax_0$，故$x-x_0\in KerA=KerB$，得$Bx=Bx_0$，进而可推出$Bx=\sum a_iz_i$。于是$C(Ax)=Bx$，即$B=CA$。
- 方法评价：你的“行空间相同”的想法基于取定基后与矩阵的对应，本质上是对的，但需补充“行空间维数等于秩且等于像空间维数，核的正交补相同”以保证$C$可逆。上面给出的“像空间构造法”更几何化，可直接避开可逆性争议，是首选的标准证明。

## 4.2 22春期中真题

【T1】（14分）已知有理数域$Q$上多项式

$$f(x)=3x^3-2x^2+x+2, g(x)=x^2-x+1$$

求$f(x)$与$g(x)$的最大公因式$(f(x),g(x))$，以及$u(x),v(x)\in Q[x]$，使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$$

解：

$$f(x)=(3x+1)g(x)-(x-1)$$
$$g(x)=x(x-1)+1$$
$$x-1=1(x-1)$$

故

$$(f(x),g(x))=1=g(x)-x(x-1)=g(x)-x((3x+1)g(x)-f(x))=(-3x^2-x+1)g(x)+xf(x)$$

则

$$(f(x),g(x))=1, u(x)=x, v(x)=-3x^2-x+1$$

评：

- 正误判断：正确。
- 标准解答：见解。
- 方法评价：辗转相除法是求最大公因式和裴蜀等式的通法，完全正确。

【T2】(10分)设$V$是数域$F$上的$n$维线性空间，$V_1,V_2$和$V_3$都是$V$的$n-1$维子空间，则是否一定有

$$(V_1+V_2)\cap V_3=(V_1\cap V_3)+(V_2\cap V_3)$$

？试证明或给出反例。

解：不会

评：

- 正误判断：未给出解答，无法直接判断正误。
- 标准解答：不一定成立。给出反例：

在$V=\mathbb{R}^4$中，取三个三维子空间（超平面）：

$$V_1=\{x_1=0\}, V_2=\{x_2=0\}, V_3=\{x_1+x_2=0\}$$

则$V_1+V_2=\mathbb{R}^4$，$(V_1+V_2)\cap V_3=V_3$，维数为3。$V_1\cap V_3=\{x_1=0,x_2=0\}$，维数为2；$V_2\cap V_3=\{x_2=0,x_1=0\}$，维数同为2，且两者相等。因此右边维数为2，左边维数为3，等式不成立。

- 方法评价：此类等式通常不成立，找反例时考虑维数：左边最多是$n-1$，右边的维数由交空间的维数决定。利用维数公式

$$\dim((V_1\cap V_3)+(V_2\cap V_3))\le 2n-4$$

（当$n\ge 3$时可能小于$n-1$），可构造性地找到反例。

【T3】（10 分）设$V$和$W$都是数域$F$上的线性空间，$\mathcal{A}$是从$V$到$W$的线性映射，其在$V$的基$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$和$W$的基$\beta_1,\beta_2,...,\beta_m$下的矩阵为$A$。则当$A$满足什么条件时映射$\mathcal{A}$是单射？并证明你的结论。

解：即$\mathcal{A}x=\mathcal{A}y\Rightarrow x=y$也就是说$\mathcal{A}(x-y)=0\Rightarrow x-y=0\Rightarrow x=y$，故$\mathcal{A}$是单射的充要条件是$Ker\mathcal{A}=\{0\}$，又$Ker\mathcal{A}=\{x\in V|\mathcal{A}x=0\}$，因此$\mathcal{A}$是单射的充要条件是$Ax=0$仅有零解。

评：

- 正误判断：思路完全正确，但表述不够精炼，且缺少了"在基下矩阵$A$的条件"这一要求的直接回应。
- 标准解答：线性映射$\mathcal{A}$是单射$\Leftrightarrow Ker\mathcal{A}=\{0\}$。在取定的基下，映射$\mathcal{A}$对应于矩阵$A_{m\times n}$。$\mathcal{A}$是单射等价于齐次线性方程组$Ax=0$只有零解，这等价于矩阵$A$的列向量组线性无关，也即$rank(A)=n$（列满秩）。
- 方法评价：利用核空间刻画单射是标准且最直接的方法。结合矩阵语言，单射的充要条件是矩阵列满秩，回答完整。

【T4】（12 分）设$\mathcal{A}$是线性空间$V$上的线性变换，其在$V$的某个基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

试判断是否可能存在$V$的一个基使得$\mathcal{A}$在此基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$$

？若存在，请给出这个基；若不存在，请说明理由。

解：只需两矩阵$A\sim B$即可，只需$\lambda$矩阵相抵。而二者$\lambda$矩阵的标准形分别为$f_\lambda(A)=\begin{pmatrix}1&&\\&\lambda-1&\\&&(\lambda-1)^2\end{pmatrix},f_\lambda(B)=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&(\lambda-1)^3\end{pmatrix}$显然二者并不相抵，也就不存在。

评：

- 正误判断：你的结论"不存在"完全正确。你对两个矩阵的$\lambda$-矩阵标准形（Smith 标准形）的计算准确无误，通过比较不变因子得出不相似的推理也是严密的。
- 标准解答：设

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$$

。线性变换在不同基下的矩阵互相相似，故问题等价于判断$A$与$B$是否相似。

方法一（$\lambda$-矩阵标准形，即你的方法）： 求特征矩阵$\lambda I-A$与$\lambda I-B$的 Smith 标准形。

- 对$A$：$D_1(\lambda)=1$，$D_2(\lambda)=\lambda-1$，$D_3(\lambda)=(\lambda-1)^3$，不变因子为$1,\lambda-1,(\lambda-1)^2$。
- 对$B$：$D_1(\lambda)=1$，因存在2阶子式

$$\begin{vmatrix}2&0\\1-\lambda&3\end{vmatrix}=6$$

为非零常数，故$D_2(\lambda)=1$，$D_3(\lambda)=(\lambda-1)^3$，不变因子为$1,1,(\lambda-1)^3$。

不变因子不同，故$A$与$B$不相似，不存在这样的基。

方法二（若尔当标准形）： 令$N=A-I$，其秩为1，故$A$的若尔当形为$J_2(1)\oplus J_1(1)$； 令$M=B-I$，其秩为2，故$B$的若尔当形为$J_3(1)$。两者不相似。

- 方法评价：你的方法（比较$\lambda$-矩阵的不变因子）是判断相似性的通用方法之一，完全正确。另一种常用通法是直接比较若尔当标准形（或初等因子），对于这类特征值单一、幂零部分简单的矩阵更为快捷。两种方法都是可行的最优解。

【T5】(12 分）设$A,B,C$都是复线性空间$V$上的线性变换。已知$A$与$B$没有公共非平凡不变子空间，并且$C$与$A$和$B$均可交换。求$C$的所有特征子空间。

解： 不会。。。完全没思路。

评：

- 正误判断：无解答，无法判断。
- 标准解答：已知$A$与$B$没有公共的非平凡不变子空间，且$C$与$A,B$均交换。

因为$C$与$A$交换，$A$的每个特征子空间都是$C$的不变子空间。同理，$B$的特征子空间也是$C$的不变子空间。 若$C$有某个特征值$\mu$，其对应的特征子空间$V_\mu$对$A$和$B$均不变（因为$A(Cx)=CAx=\mu Ax$，说明$A$保持$V_\mu$）。于是$V_\mu$是$A$和$B$的公共不变子空间。由条件，它必须是$\{0\}$或整个$V$。 但特征子空间非零，故$V_\mu=V$。这意味着$C$在整个$V$上只能是数乘变换，即$C=\mu I$。 所以$C$的所有特征子空间就是整个$V$（即只有特征值一个，且对应的特征子空间为$V$）。

- 方法评价：此题属于抽象理论题，“无公共非平凡不变子空间”是极强条件，结合可交换性质可推得$C$必为纯量变换。关键在于观察$C$的特征子空间对$A,B$不变。

【T6】(18 分）设$V$为$n$维线性空间，$T$为$V$上秩为$r$的线性变换且$k$为满足$T^k=0$的最小正整数。

- (1)对于$1<l\le k$，证明$\dim ImT^l<\dim ImT^{l-1}$；
- (2)若$k=2$，证明$ImT\subset KerT$并计算商空间$KerT/ImT$的维数。

解：

- (1)$ImT^l\subseteq ImT^{l-1}$， 若$\dim ImT^l=\dim ImT^{l-1}$， 则$T^l=T^{l-1}$， 这与$l\le k$矛盾。 故$\dim ImT^l<\dim ImT^{l-1}$。

- (2)已知$T^2=0$，则任取$v\in V$，有$T^2v=0$，即$T(Tv)=0$，所以$Tv\in KerT$。因此$ImT\subset KerT$。商空间$KerT/ImT$的维数为$\dim KerT-\dim ImT$，且由秩-零化度公式给出$\dim KerT+\dim ImT=n$。后面不会了。

评：

- 正误判断：(1)证明思想正确，但不够严格。(2)包含关系正确，商空间维数未完成，不会的部分无法评价。
- 标准解答：

(1)对$1<l\le k$，显然$ImT^l\subseteq ImT^{l-1}$。若两者维数相等，则结合包含关系即得$ImT^l=ImT^{l-1}$。于是对任意$x\in V$，存在$y$使$T^{l-1}x=T^ly$，从而$T^{l-1}(x-Ty)=0$。由此可推出$ImT^{l-1}\subseteq KerT$，进而可证$T^l=0$，与$k$的最小性矛盾。故维数必严格小于。

$T^2=0\Rightarrow\forall v,$

(2)$T(Tv)=0\Rightarrow ImT\subseteq KerT$。 由秩-零化度定理：$\dim KerT=n-r$，其中$r=rankT$。已知$ImT\subseteq KerT$，故商空间$KerT/ImT$的维数$=(n-r)-r=n-2r$。

- 方法评价：(1)的核心是"像空间链严格递减"，你的思路对，但要写清"若维数等则像空间相等，进而导致指数降低"的论证。(2)只要利用包含关系和维数公式即得，你卡在对"商空间维数"定义的理解上。

【T7】(16分)设$A$为$n$阶复矩阵，且具有$n$个互不相同的特征值$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$，设$M_n(C)$为所有$n$阶复矩阵构成的线性空间，定义$M_n(C)$上线性变换$\mathcal{A}$为

$$\mathcal{A}(B)=ABA^T,\forall B\in M_n(C)$$

- (1)设$X,Y\in C^n$分别为属于$A$的特征值$\lambda_1,\lambda_2$的特征向量，利用$X,Y$构造出$\mathcal{A}$的一个特征向量；
- (2)求$\mathcal{A}$的一个非平凡零化多项式。

解：

- (1)由于$\mathcal{A}(XY^T)=A(XY^T)A^T=(AX)(AY)^T$，而$AX=\lambda_1X$，$AY=\lambda_2Y$，所以$\mathcal{A}(XY^T)=\lambda_1\lambda_2(XY^T)$。因此$XY^T$是$\mathcal{A}$的一个特征向量。
- (2)没思路。

评：

- 正误判断：(1)完全正确。利用向量外积构造特征向量，简便且漂亮。(2)未给出，无法评价。
- 标准解答：

(1)如你所写，$\mathcal{A}(XY^T)=\lambda_1\lambda_2(XY^T)$，所以$XY^T$是特征向量，对应特征值$\lambda_1\lambda_2$。

(2)$A$有$n$个不同特征值，故其极小多项式等于特征多项式$\prod_{i=1}^n(\lambda-\lambda_i)$，次数为$n$。考虑多项式$p(x)=\prod_{i=1}^n\prod_{j=1}^n(x-\lambda_i\lambda_j)$，它可以零化$\mathcal{A}$。因为$\mathcal{A}$在基$\{E_{ij}\}$下的矩阵是$A\otimes A$，特征值为$\lambda_i\lambda_j$。故$p(\mathcal{A})=0$，且次数为$n^2$。这就是一个非平凡零化多项式。

- 方法评价：(1)你的构造直接契合了克罗内克积的谱性质，是最佳方法。(2)利用变换矩阵的特征值直接写出零化多项式（特征多项式）是最简便的途径。

【T8】(8分)设$M_n(K)$为数域$K$上所有$n$阶矩阵构成的线性空间，$W$是$M_n(K)$的一个子空间，且对任意$A\in M_n(K)$和任意$B\in W$有$AB\in W$。设$W$中矩阵秩的最大值为$r$，证明$\dim W=nr$。

证：不会。。。

评：

- 正误判断：无解答，无法判断。
- 标准解答：设$M\in W$的秩为$r$。存在可逆阵$P,Q$使得$PMQ=\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$。

考虑映射$\varphi: M_n(K)\to M_n(K)$定义为$\varphi(X)=PXQ$，它是线性同构且保持秩。由条件，$W$对右乘任意矩阵封闭，故对任意$B\in M_n(K)$，有$MB\in W$。于是$\varphi(MB)=\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}(Q^{-1}BQ)\in\varphi(W)$。 设$\varphi(W)=W'$，则$W'$包含所有形如$\begin{pmatrix} X_{r\times n}\\ 0\end{pmatrix}$的矩阵（由$B$的任意性）。同理可用左乘证明也包含所有前$r$列任意、后$n-r$行为零的矩阵，等等。最终可得$W'$恰为所有后$n-r$行全为零的矩阵空间，维数为$nr$。由于$\varphi$是维数不变的，故$\dim W=nr$。

- 方法评价：此类"理想型"子空间维数问题，标准技巧是用矩阵乘法的任意性将秩最高元化为标准形，再生成整个空间。核心是充分利用"右乘任意矩阵封闭"这一强条件。

## 4.3 23春期中真题

【T1】(25分)设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

$M_2(R)$上的线性变换$\mathcal{A}$定义为对任意$X\in M_2(R)$有$\mathcal{A}(X)=AX$。

- (1)分别求$Im\mathcal{A}$和$Ker\mathcal{A}$的维数以及一组基；
- (2)把上面求出的$Im\mathcal{A}$的一组基扩充成$M_2(R)$的一组基；
- (3)线性变换$\mathcal{A}$是否可以对角化？若可以对角化，给出$M_2(R)$的一组基使得$\mathcal{A}$在该基下的矩阵为对角阵。

解：

- (1)设$X=(a_{ij})$，则$\mathcal{A}(X)=AX=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11}+2a_{12} & a_{11}+2a_{22}\\ 2a_{11}+4a_{12} & 2a_{11}+4a_{22}\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$故$Im\mathcal{A}$的维数为2，一组基为$E_{11}+2E_{21},E_{12}+2E_{22}$。由$AX=0$解得$Ker\mathcal{A}$的维数为2，一组基为$-2E_{11}+E_{21},E_{22}-2E_{12}$。
- (2)将$Im\mathcal{A}$的一组基$E_{11}+2E_{21},E_{12}+2E_{22}$扩充成$M_2(R)$的一组基，可以添加$E_{11}-2E_{21},E_{12}-2E_{22}$。
- (3)设 $\mathcal{A}$在 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$下的矩阵为$A$，则由$\mathcal{A}(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})A$可知$A=\begin{pmatrix} 1&0&2&0\\ 0&1&0&2\\ 2&0&4&0\\ 0&2&0&4\end{pmatrix}$则$f_\lambda(A)$的标准形为$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \lambda(\lambda-5) & \\ & & & \lambda(\lambda-5)\end{pmatrix}$则

$m_\lambda(A)=\lambda(\lambda-5)$可分解为互异的一次因式之积，故$A$可对角化。设$P=\begin{pmatrix}-2&0&1&0\\0&-2&0&1\\1&0&2&0\\0&1&0&2\end{pmatrix}$，

则$P^{-1}AP=D=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&5\end{pmatrix}$。则$A(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})P=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})PD$，故$A$在$(-2E_{11}+E_{21},E_{22}-2E_{12},E_{11}+2E_{21},E_{12}+2E_{22})$这组基下的矩阵为对角阵$D$。

评：

- 正误判断：(1)(2)(3)均完全正确。像空间与核空间的基计算准确，扩充基合理，对角化基对应特征向量，无误。
- 标准解答：

(1)设 $X=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$， 则 $A(X)=AX=\begin{pmatrix}x_1+2x_3&x_2+2x_4\\2x_1+4x_3&2x_2+4x_4\end{pmatrix}=(x_1+2x_3)\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}+(x_2+2x_4)\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}$。故$\dim ImA=2$，一组基为$E_{11}+2E_{21},E_{12}+2E_{22}$。解$AX=0$得$x_1=-2x_3,x_2=-2x_4$，通解$X=x_3\begin{pmatrix}-2&0\\1&0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}0&-2\\0&1\end{pmatrix}$。故$\dim KerA=2$，一组基为$-2E_{11}+E_{21},E_{22}-2E_{12}$。

(2)将像空间基扩充为$M_2(R)$的基，可取$E_{11}+2E_{21},E_{12}+2E_{22},E_{11}-2E_{21},E_{12}-2E_{22}$。

(3)$A$在标准基下的矩阵为$\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&2\\2&0&4&0\\0&2&0&4\end{pmatrix}$，极小多项式为$\lambda(\lambda-5)$，可对角化。特征值 0 对应的特征向量为核基，特征值 5 对应的特征向量为像基。故取基$-2E_{11}+E_{21},E_{22}-2E_{12},E_{11}+2E_{21},E_{12}+2E_{22}$，则$A$在该基下的矩阵为$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&5\end{pmatrix}$。

- 方法评价：将抽象线性变换转化为矩阵运算，利用基展开求像与核、再对角化，是标准通法。你正确区分了$M_2(R)$的元素形式和坐标表示，计算清晰。

【T2】（20 分）设线性空间$V$上的线性变换$A$的特征多项式为$f(x)=x^4-6x^2-8x-3$。

- (1)将$V$分解为$A$的根子空间$V_1$和$V_2$的直和；
- (2)对于$i=1,2$，分别求投影变换$P_i$（写成$A$的多项式形式）使得$ImP_i=V_i$且$P_i$将另一个根子空间变为0；
- (3)若$A$的两个特征值的几何重数都是1，求$A$的最小多项式以及$A$-不变子空间的个数。

解：

- (1)$f(x)=(x+1)^3(x-3)$，则由准素分解定理可得$Kerf(x)=Ker(x+1)^3\oplus Ker(x-3)$，而由 Hamiton-Caley 定理可知$f(A)=0$即$V=Ker(A+I)^3\oplus Ker(A-3I)$
- (2)由投影变换的定义与性质可知，任取$v\in V$则由$V=V_1\oplus V_2$可得存在唯一的$v_1\in V_1$和$v_2\in V_2$使得$v=v_1+v_2$。因此，投影变换$P_1$定义为$P_1(v)=v_1$，投影变换$P_2$定义为$P_2(v)=v_2$。由投影变换的性质可知，$P_1(v_1)=v_1,P_1(v_2)=0,P_2(v_1)=0,P_2(v_2)=v_2,P_1^2=P_1,P_2^2=P_2$，且$P_1+P_2=I$，$P_1P_2=0$。后续不会了。。。
- (3)设$A$的最小多项式为$m(x)=(x+1)^n(x-3),n=1,2,3$，而由于-1 对应的代数重数为$3>1$，因此$n\neq 1$（否则就可以对角化，代数重数等于几何重数），然后后面也不会了。。。

评：

- 正误判断：(1)正确。(2)未给出$P_i$的多项式形式，未能得分。(3)最小多项式推理方向对，但不完整；不变子空间个数未求出。
- 标准解答：

(1)$f(x)=(x+1)^3(x-3)$，由准素分解定理，$V=Ker((A+I)^3)\oplus Ker(A-3I)$。记$V_1=Ker((A+I)^3)$，$V_2=Ker(A-3I)$。

(2)令$g(x)=(x+1)^3$，$h(x)=x-3$，则$V_1=Kerg(A)$，$V_2=Kerh(A)$，且$(g,h)=1$。由裴蜀等式可取 $1=\frac{1}{64}(x+1)^3+\frac{-x^2-6x-21}{64}(x-3)$. 代入$A$得 $I=\frac{1}{64}(A+I)^3+\frac{-A^2-6A-21I}{64}(A-3I)$. 取 $P_2=\frac{1}{64}(A+I)^3, P_1=I-P_2=I-\frac{1}{64}(A+I)^3$（等价地$P_1=\frac{-A^2-6A-21I}{64}(A-3I)$）。并且$P_1+P_2=I, P_1P_2=P_2P_1=0$，由定理3.1.4可知二者为互补投影；结合$P_2$在$V_1$上为0、在$V_2$上为$I$及$P_1$在$V_2$上为0、在$V_1$上为$I$，得$ImP_1=V_1, ImP_2=V_2$。

(3)已知$f(x)=(x+1)^3(x-3)$，且两特征值的几何重数均为1。故属于$-1$的若尔当块仅1个且阶数为3，属于3的若尔当块仅1个且阶数为1，从而 $J=J_3(-1)\oplus J_1(3)$。 最小多项式取各特征值对应最大若尔当块阶数，得$m(x)=(x+1)^3(x-3)$。令$W_1, W_2$分别为$J_3(-1), J_1(3)$对应不变子空间，则$V=W_1\oplus W_2$，且二者无公共特征值。由不变子空间分解定理，$V$的任一$A$-不变子空间都可唯一分解为来自$W_1$与$W_2$的不变子空间的直和，因此总个数为两者个数乘积。$k$阶若尔当块有$k+1$个不变子空间，3阶若尔当块有$3+1=4$个不变子空间，1阶块有2个，故 $A$-不变子空间个数$=4\times 2=8$（含零空间与全空间）。

- 方法评价：(1)准素分解是标准方法。(2)投影变换用$A$的多项式表达，关键是构造满足插值条件的多项式，常用裴蜀等式。(3)最小多项式由最大若尔当块阶数决定；不变子空间个数需用若当结构计算，属深入考点。

【T3】（10 分）设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&6&a\\b&1&-5\\1&2&-6\end{pmatrix}$$

满足$rank(A+I)=1$，求矩阵$A$和$A$的 Jordan 标准型。

解：由$rank\begin{pmatrix}3&6&a\\b&2&-5\\1&2&-5\end{pmatrix}=1$可知$A=\begin{pmatrix}2&6&-15\\1&1&-5\\1&2&-6\end{pmatrix}$，先求特征值$f(\lambda)=(\lambda+1)^3$则$\lambda=-1$，则约当标准形只可能是$\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$或者$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$或者$\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，又由于$rank(A+I)=1$，则$A$的 Jordan 标准型为$\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$。

评：

- 正误判断：全对。矩阵求解、秩条件运用、特征值与若尔当标准形均正确。
- 标准解答：由$rank(A+I)=1$，得$A+I$各行成比例：$\begin{pmatrix}3&6&a\\b&2&-5\\1&2&-5\end{pmatrix}$。比较第一、三行得$a=-15$；第二、三行得$b=1$。故$A=\begin{pmatrix}2&6&-15\\1&1&-5\\1&2&-6\end{pmatrix}$。特征多项式$|\lambda I-A|=(\lambda+1)^3$，特征值$-1$

三重。$rank(A+I)=1$推出几何重数$=3-1=2$，故若尔当块为$J_2(-1)\oplus J_1(-1)$，标准形为$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$。

- 方法评价：由$A-\lambda_0 I$的秩确定若尔当块数（几何重数）是求若尔当形的快捷方法，思路明确。

【T4】（15 分）设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1)求$A$的特征多项式和最小多项式；
- (2)求可逆矩阵$U$和 Jordan 形矩阵$J$（写成上三角形式）使得$U^{-1}AU=J$。

解：

- (1)直接求$A$的$\lambda$矩阵的标准形，$f(\lambda)\sim\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda^3 \end{pmatrix}$则特征多项式为$f(\lambda)=\lambda^4$，最小多项式为$m(\lambda)=\lambda^3$。
- (2)由于特征值为0，则$A$的Jordan标准型只能是$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$或者$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$或者$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，而$rankA=2$，则$J=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。然后这个$U$不太会求了。。。

评：

- 正误判断：(1)完全正确。(2)Jordan 形$J$正确，可逆矩阵$U$未求出，解答不完整。
- 标准解答：

(1)$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。计算得$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\neq 0$，$A^3=0$。故特征多项式$f(\lambda)=\lambda^4$，极小多项式$m(\lambda)=\lambda^3$。

(2)极小多项式次数3，$\dim KerA=4-rankA=4-2=2$，故若尔当块为$J_3(0)\oplus J_1(0)$：$J=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。求可逆矩阵$U$：取循环基首$\alpha_1$满足$A^2\alpha_1\neq 0$。取$\alpha_1=e_1=(1,0,0,0)^T$，则$\alpha_2=A\alpha_1=(0,3,2,1)^T$，$\alpha_3=A^2\alpha_1=(0,2,1,0)^T\neq 0$，$A\alpha_3=0$。再取$\alpha_4\in KerA$与$\alpha_3$线性无关，例如$\alpha_4=(0,0,0,1)^T$（$A\alpha_4=0$）。则$U=(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\alpha_4)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，满足$U^{-1}AU=J$。

- 方法评价：最小多项式通过幂次检验求得；若尔当基构造需选取循环向量并补充核空间基，是完整的标准流程。

【T5】（10 分）设多项式$f(x)$与$g(x)$互素，$n$阶矩阵$A$满足$f(A)g(A)=0$。证明$rank(f(A))+rank(g(A))=n$。

证：由唯一素分解定理可知$Kerf(A)\oplus Kerg(A)=V$，则$n=\dim Kerf(A)+\dim Kerg(A)$又由秩-零化度定理可知$\dim Kerf(A)=n-rankf(A),\dim Kerg(A)=n-rankg(A)$，因此$n=2n-rankf(A)-rankg(A)$，从而$rankf(A)+rankg(A)=n$。

评：

- 正误判断：思路正确，但推导中"$V=Kerf(A)\oplus Kerg(A)$"未严格利用互素条件证明，需补全。
- 标准解答：因$(f,g)=1$，存在多项式$u,v$使得$uf+vg=1$，于是$u(A)f(A)+v(A)g(A)=I$。对任意$x\in V$，$x=f(A)u(A)x+g(A)v(A)x$。前者属于$Kerg(A)$，后者属于$Kerf(A)$。若$x\in Kerf(A)\cap Kerg(A)$，则$x=0$。故$V=Kerf(A)\oplus Kerg(A)$。由秩-零化度：$\dim Kerf(A)=n-rankf(A)$，$\dim Kerg(A)=n-rankg(A)$。叠加得$n=2n-rankf(A)-rankg(A)$，即$rankf(A)+rankg(A)=n$。
- 方法评价：利用裴蜀等式得到直和分解是处理此类问题的核心技巧，证明简洁且通用。

【T6】（10 分）设$A$是有限维线性空间$V$上的线性变换，证明$V=ImA\oplus KerA$的充要条件是$ImA=ImA^2$。

证：

$\Rightarrow$：任取$v\in V$，则存在唯一的$v_1\in ImA$和$v_2\in KerA$使得$v=v_1+v_2$。由于$v_1\in ImA$，则存在$u\in V$使得$v_1=Au$，又由于$v_2\in KerA$，则$Av_2=0$，因此$Av=Av_1+Av_2=A^2u+0=A^2u$，所以$ImA\subseteq ImA^2$。又由于$ImA^2\subseteq ImA$，因此$ImA=ImA^2$。

$\Leftarrow$：由秩-零化度定理得$\dim ImA+\dim KerA=n$，又由$ImA=ImA^2$可知$\dim ImA=\dim ImA^2$，因此$\dim KerA=\dim KerA^2$，又$KerA\subseteq KerA^2$，所以$KerA=KerA^2$。若证直和，只需证$ImA\cap KerA=\{0\}$，任取$v\in ImA\cap KerA$，则存在$u\in V$使得$v=Au$，又由于$v\in KerA$，则$Av=0$，因此$A^2u=0$，又由于$ImA=ImA^2$，则存在$w\in V$使得$Aw=A^2u=0$，因此$v=Au=Aw=0$。所以$ImA\cap KerA=\{0\}$，从而$V=ImA\oplus KerA$。

评：

- 正误判断：完全正确。两个方向的证明严谨，逻辑清晰。
- 标准解答：

$(\Rightarrow)$若$V=ImA\oplus KerA$，则对任意$Ax\in ImA$，由直分解可写$x=Ay+z$，其中$z\in KerA$，则$Ax=A^2y\in ImA^2$，故$ImA\subseteq ImA^2$，反向包含显然，得$ImA=ImA^2$。 $(\Leftarrow)$若$ImA=ImA^2$，则$\dim ImA=\dim ImA^2$，由秩-零化度得$\dim KerA=\dim KerA^2$，又$KerA\subseteq KerA^2$，故$KerA=KerA^2$。任取$x\in ImA\cap KerA$，有$x=Ay$且$Ax=0$，则$A^2y=0$，故$y\in KerA^2=KerA$，得$x=Ay=0$。因此$ImA\cap KerA=\{0\}$，结合维数即得直和。你的证明与此一致，表达清晰。

- 方法评价：应用维数公式和包含关系是简洁的代数证法，思路标准。

【T7】（10 分）设$A$是有限维复线性空间$V$上的线性变换，且$A$的最小多项式$m(x)$的次数为$d$。证明：存在向量$\alpha\in V$，使得$\alpha,A\alpha,A^2\alpha,...,A^{d-1}\alpha$线性无关。

证：假设不存在，那么$\forall\alpha\in V$，$\alpha, A\alpha, A^2\alpha, ..., A^{d-1}\alpha$线性相关，即存在$k<d$使得$A^k\alpha$可以表示成$\alpha, A\alpha, ..., A^{k-1}\alpha$的线性组合。由此可得对于任意向量$\alpha$，存在一个次数小于$d$的多项式$p(x)$使得$p(A)\alpha=0$，这与$m(x)$是最小多项式矛盾。故存在向量$\alpha\in V$使得$\alpha, A\alpha, A^2\alpha, ..., A^{d-1}\alpha$线性无关。

评：

- 正误判断：基本正确，但反证过程中"存在一个次数小于$d$的多项式$p(x)$使$p(A)\alpha=0$"到全局矛盾的步骤不够严密，需明确指出这将导致存在次数小于$d$的多项式零化整个空间，与最小多项式定义矛盾。
- 标准解答：反证：假设对任意$\alpha\in V$，向量组$\alpha, A\alpha, ..., A^{d-1}\alpha$线性相关，则存在不全为零的$c_0, ..., c_{d-1}$使得$\sum_{i=0}^{d-1} c_i A^i\alpha=0$，即存在非零多项式$p_\alpha(x)$次数$<d$使$p_\alpha(A)\alpha=0$。取空间的一组基$\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$，对应有多项式$p_i(x)$次数$<d$满足$p_i(A)\varepsilon_i=0$，且$p_i$非零。令$p(x)=\operatorname{lcm}(p_1, ..., p_n)$（或乘积），则$p(A)\varepsilon_i=0$对所有$i$成立，故$p(A)=0$。但$\deg p\le\sum\deg p_i<nd$，未必$<d$，此处论证不直接。正确做法：考虑零化子集$\{q(x)\mid q(A)=0\}$为主理想，由其生成元即最小多项式次数为$d$。若每个向量都被次数小于$d$的非零多项式零化，则可推出$A$的极小多项式次数必小于$d$，矛盾。（也可用循环分解定理直接得出存在一个向量其零化多项式等于极小多项式，此题即为此经典结论。）
- 方法评价：本题本质是"循环向量存在性"的证明，用反证法抓矛盾是自然的，但需小心"局部零化推出整体零化"的严密性。标准教材中多用分解为循环子空间的方法证明。

## 4.4 24 春期中真题

【T1】（15 分）考虑数域$K$上线性空间$K^4$，设$e_i$表示$K^4$中第$i$个分量为 1 其余分量为 0 的向量，$1\le i\le 4$。令

$$V_1=\{(x,y,z,t)\in K^4\mid 2x+y+z-t=0, x+y+z=0\}$$

$V_2$是$e_1+e_3$生成的子空间，$V_3$是$e_1+e_2$生成的子空间，判断$V_1+V_2+V_3$是否为直和并计算$\dim(V_1+V_2+V_3)$。

解：由题得$\begin{cases}x=t\\y+z=-t\end{cases}$则$V_1=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\rangle=\langle e_1-e_3+e_4, e_2-e_3\rangle$，而$V_1+V_2+V_3=\langle e_1+e_3, e_1+e_2, e_1-e_3+e_4\rangle$，则$\dim(V_1+V_2+V_3)=3\ne\dim V_1+\dim V_2+\dim V_3=4$，故不是直和。

评：

- 正误判断：完全正确。
- 标准解答：由方程组可得$V_1=\langle(1,0,-1,1),(0,1,-1,0)\rangle$，故$V_1$的通解为$t(1,0,-1,1)+y(0,1,-1,0)$，维数为 2。又$V_2=\langle(1,0,1,0)\rangle$，$V_3=\langle(1,1,0,0)\rangle$，两者维数均为 1。四个生成元

$(1,0,-1,1),(0,1,-1,0),(1,0,1,0),(1,1,0,0)$张成空间的秩为 3，故$\dim(V_1+V_2+V_3)=3$。而$2+1+1=4\neq 3$，故$V_1+V_2+V_3$不是直和。

- 方法评价：用生成元求秩判维数与直和，属于标准通法。

【T2】（15 分）设$A$为副对角线上元素全为 1，其它元素全为 0 的$n$阶方阵，求可逆矩阵$P$使得$P^{-1}AP$为对角阵。

解：设$D_n=f(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{pmatrix} \lambda & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & \lambda \end{pmatrix}$则$D_n=\lambda D_{n-1}-D_{n-2}$，且$D_1=\lambda,D_2=\lambda^2-1$则设

评：

- 正误判断：解答不完整，仅写出递推式。
- 标准解答：设$A$是副对角线全为 1 的矩阵，则$Ae_i=e_{n+1-i}$。取

$v_i=e_i+e_{n+1-i}$，则$Av_i=v_i$；$w_i=e_i-e_{n+1-i}$，则$Aw_i=-w_i$，其中$i=1,\dots,\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$。若$n$为奇数，再取中间向量$e_{\frac{n+1}{2}}$，它也是特征值1的特征向量。将这些向量按顺序作列组成矩阵$P$，则$P$可逆，且 $P^{-1}AP$为对角阵，其对角元依次为$1,\dots,1,-1,\dots,-1$。

- 方法评价：利用副对角矩阵的对称性直接构造特征向量，是这题最简洁的做法。

【T3】（10 分）设 5 阶复方阵$A$的特征多项式为$f(x)=(x-2)^3(x+7)^2$，最小多项式为$m(x)=(x-2)^2(x+7)$，求$A$的 Jordan 标准形。

解：不难得出 Smith 标准形为$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & (\lambda-2)(\lambda+7) & \\ & & & & (\lambda-2)^2(\lambda+7) \end{pmatrix}$，则初等因子$(\lambda-2),(\lambda+7),(\lambda-2)^2,(\lambda+7)$对应 Jordan 块$J_1(2),J_1(-7),J_2(2),J_1(-7)$，则 Jordan 标准形为$\begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & -7 & \\ & & & & -7 \end{pmatrix}$

评：

- 正误判断：完全正确。
- 标准解答：特征值2的代数重数为 3，几何重数为 2，因此对应的 Jordan 块为$J_2(2)\oplus J_1(2)$；特征值$-7$的代数重数为 2，且最小多项式中只有一次因子$(x+7)$，故对应两块$J_1(-7)$。于是

$J=J_2(2)\oplus J_1(2)\oplus J_1(-7)\oplus J_1(-7)$。

- 方法评价：结合特征多项式和最小多项式判断 Jordan 块结构，是标准方法。

【T4】（20 分）设复数域$C$上的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

- (1)求矩阵$A$的 Jordan 标准形$J$；
- (2)求可逆矩阵$P$使得$P^{-1}AP=J$；
- (3)求矩阵$A$的最小多项式。

解：

- (1)$A$的 Smith 标准形为$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&(\lambda-1)^3\end{pmatrix}$，则$J=\begin{pmatrix}1&1&\\&1&1\\&&1\end{pmatrix}$
- (2)设$P=(X_1,X_2,X_3)$由$AP=PJ$得$\begin{cases}AX_1=X_1\\AX_2=X_1+X_2\\AX_3=X_2+X_3\end{cases}$，

由$(A-I)X=0$取$X_1=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$

由$(A-I)X_2=X_1$取$X_2=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$

由$(A-I)X_3=X_2$取$X_3=\begin{pmatrix}7\\0\\1\end{pmatrix}$

则$P=\begin{pmatrix}3&3&7\\1&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

- (3)由 Smith 标准形可知$A$的最小多项式为$m(\lambda)=(\lambda-1)^3$。

评：

- 正误判断：全对。
- 标准解答：

(1)由$(A-I)^2\neq 0$且$(A-I)^3=0$，故最小多项式为$(\lambda-1)^3$，Jordan 标准形为$J=J_3(1)$，即$J=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$。

(2)解 Jordan 链：$(A-I)X_1=0$，取$X_1=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$；$(A-I)X_2=X_1$，取$X_2=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$；$(A-I)X_3=X_2$，取$X_3=\begin{pmatrix}7\\0\\1\end{pmatrix}$。于是$P=\begin{pmatrix}3&3&7\\1&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，并且$P^{-1}AP=J$。

(3)最小多项式为$m(\lambda)=(\lambda-1)^3$。

- 方法评价：解 Jordan 链构造相似变换矩阵，是求 Jordan 标准形的标准方法。

【T5】(10 分）设$A$是有限维线性空间$V$上的可逆线性变换，$W$是$A$-不变子空间，证明$W$也是$A^{-1}$-不变子空间。

解：由题得$\forall x\in W$，有$Ax\in W$。要证$W$是$A^{-1}$-不变子空间，需证$\forall x\in W$，有$A^{-1}x\in W$。由于$A$可逆，则$A$是单射，若在有限维情况下，$A$也是满射，因此对于任意$x\in W$，存在$y\in W$使得$x=Ay$，又由于$Ay\in W$，则$y=A^{-1}x\in W$。因此，$W$是$A^{-1}$-不变子空间。

评：

- 正误判断：解答思路正确，但表述有瑕疵。

- 标准解答：因为$A$可逆且$W$是$A$-不变子空间，所以$A(W) \subseteq W$。又$A|_W : W \to W$是线性单射，而$W$有限维，故$A|_W$也是满射，于是$A(W) = W$。因此对任意$x \in W$，存在$y \in W$使得$Ay = x$，即$A^{-1}x = y \in W$，从而$W$是$A^{-1}$-不变子空间。
- 方法评价：利用有限维上单射即满射，证明最简洁也最严谨。

【T6】(10 分）设$V_1, V_2$为线性空间$V$的子空间且$V_1 + V_2 = V$，令$W_1$为$V_1 \cap V_2$在$V_1$中的一个补空间，证明$V = W_1 \oplus V_2$。

解：由题得$V_1 = W_1 \oplus (V_1 \cap V_2)$任取$x \in V$，则存在$v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$使得$x = v_1 + v_2$，而对$v_1$，又存在唯一的$w_1 \in W_1, v_0 \in V_1 \cap V_2$使得$v_1 = w_1 + v_0$则$x = w_1 + (v_0 + v_2) \in W_1 + V_2$，则$V \subseteq W_1 + V_2$，又由于$W_1 \subseteq V_1, V_2 \subseteq V$，则$W_1 + V_2 \subseteq V$，因此$V = W_1 + V_2$。下面只需证明$W_1 \cap V_2 = 0$即可。任取$u \in W_1 \cap V_2$，则$u \in W_1$，而$W_1 \cap (V_1 \cap V_2) = 0$，则$W_1 \cap V_2 = \{0\}$。证毕。

评：

- 正误判断：完全正确。
- 标准解答：因为$V_1 = W_1 \oplus (V_1 \cap V_2)$，任取$x \in V$，可写成$x = v_1 + v_2$，其中$v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$。再将$v_1$分解为$v_1 = w_1 + u$，其中$w_1 \in W_1, u \in V_1 \cap V_2$，于是$x = w_1 + (u + v_2) \in W_1 + V_2$，故$V \subseteq W_1 + V_2$。反向包含显然，所以$V = W_1 + V_2$。

又若$x \in W_1 \cap V_2$，则$x \in W_1$且$x \in V_2$，从而$x \in V_1 \cap V_2$。但$W_1$是$V_1 \cap V_2$在$V_1$中的补空间，所以$W_1 \cap (V_1 \cap V_2) = 0$，故$x = 0$。于是$V = W_1 \oplus V_2$。

- 方法评价：利用补空间定义与元素分解，属于标准证明。

【T7】(10 分）设$V$是域$F$上的$n$维线性空间，$A$是$V$上的一个线性变换，$A$的最小多项式为$m(\lambda)$。证明：$deg(m(\lambda)) \leq rankA + 1$。

证：$\forall \alpha \in V$，构造$\alpha, A\alpha, ..., A^{d-1}\alpha$，其中$d = \deg(m(\lambda))$。若这些向量线性相关，则存在不全为零的$c_0, ..., c_{\{d-1\}}$使得$\sum_{i=0}^{d-1} c_i A^i \alpha = 0$，即存在次数小于$d$的多项式$p(x)$使$p(A)\alpha = 0$。但由最小多项式的定义，这与$\alpha$的零化多项式等于$m(\lambda)$矛盾。因此，这些向量线性无关，而$A\alpha \sim A^{d-1}\alpha \in ImA$，故$\dim ImA \geq d - 1$，即$rankA \geq d - 1$，得$deg(m(\lambda)) \leq rankA + 1$。

评：

- 正误判断：思路正确但不够严密。
- 标准解答：设$d = \deg m(\lambda)$。由最小多项式的标准结论，可取$\alpha \in V$使得$\alpha, A\alpha, ..., A^{d-1}\alpha$线性无关。于是$A\alpha, A^2\alpha, ..., A^{d-1}\alpha$是$\mathfrak{I}A$中的$d-1$个线性无关向量，故$\dim ImA \geq d - 1$，即$rankA \geq d - 1$，从而$d \leq rankA + 1$。
- 方法评价：这题的关键是先找到一个循环向量再数维数，属于最小多项式的标准应用。

【T8】(10 分）设$V$是数域$F$上的 4 维线性空间，$A$是$V$上的线性变换，且$A$的幂零指数为 3。求证：$ImA \cap KerA = ImA^2$

评：

- 正误判断：完全正确。

- 标准解答：幂零指数为 3 且空间维数为 4，所以 Jordan 形只能是$J_3(0) \oplus J_1(0)$。取相应 Jordan 基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$，使得

$A\alpha_1 = 0, A\alpha_2 = \alpha_1, A\alpha_3 = \alpha_2, A\alpha_4 = 0$。 则$ImA = \langle\alpha_1, \alpha_2\rangle$，$KerA = \langle\alpha_1, \alpha_4\rangle$，$ImA^2 = \langle\alpha_1\rangle$，故$ImA \cap KerA = ImA^2$。

- 方法评价：用 Jordan 基直接表出像、核和二次像，直观而严格。

## 4.5 25 春期中真题

【T1】求矩阵的 Jordan 标准形：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解：$f(\lambda) = (\lambda - 1)^4, rank(A - I)^4 = 0, n = 4 - 0 = 4$，故$\lambda = 1$对应的 Jordan 块有 4 个，故 Jordan 标准形为$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

【T2】设复方阵

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

问是否存在复方阵$B$使得$A = B^2$，若存在则给出构造，不存在则给出证明。

解：

【T3】设$n$阶复方阵$A$的元素均为 1，求最小多项式并说明它是否可对角化。

解：由题得$A^2 - nA = 0$是一个零化多项式，由于不可能是 1 次的，则$m(\lambda) = \lambda(\lambda - n)$，又由于可在复数域上分解为不等的一次因式，所以$A$可对角化。

【T4】设$\varphi, \psi$是实数域奇数维线性空间$V$上的线性变换，且$\psi\varphi = \varphi\psi$，证明二者有公共特征向量。

解：

【T5】设$A$是数域$\Pi$上的$n$阶幂零矩阵，这里$n > 1$，证明若$A^n = O, A^{n-1} \neq O$，则不存在$\Pi$上的$n$阶矩阵$B$使得$B^2 = A$。

【T6】设$V$为次数不超过$n$的实系数多项式构成的线性空间。

- (1)证明$1, (x+1), (x+1)^2, ..., (x+1)^{n-1}$构成$V$的一组基；
- (2)将求导看作$V$上的线性变换$D$，求$D$在(1)中基下的矩阵；
- (3)求$D$的所有不变子空间。

解：

- (1)设

【T7】设$n$阶复方阵$A$有$n$个不同特征值$\lambda_1,...,\lambda_n$，并设$M_n$为所有$n$阶复方阵构成的线性空间。考虑$M_n$上的线性变换$L(B)=ABA^T$，这里$A^T$为$A$的转置。
- (1)设$x,y\in C^n$为$A$的特征值$\lambda_1,\lambda_2$的特征向量，利用$x,y$构造$L$的一个特征向量；
- (2)求$L$的一个非零化零多项式。

【T8】设$n$阶复方阵$A$的特征值均为 1，证明$A$与$A^k$相似，这里$k$为正整数。

## 4.6 题型总结

【题型 1】以 Jordan 标准形为核心的考察

- 【知识回顾】
- 【常见考法】
- (1)求 Jordan 标准形：给出一个矩阵$A$，求$A$的 Jordan 标准形$J$。
- (2)求相似变换矩阵：给出一个矩阵$A$，求一个可逆矩阵$P$使得$P^{-1}AP=J$，其中$J$为$A$的 Jordan 标准形。
- (3)其它数字特征与 Jordan 标准形的相互求解：例如最小多项式、几何重数等。

解：

- (1)

法一：先用$\lambda$矩阵的初等变换得到 Smith 标准形$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & \\ & d_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n(\lambda) \end{pmatrix}$，将每个不变因子分解为不可约多项式的幂（在复数域上就是一次因式的幂），每个初等因子$(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$对应$J_{k_i}(\lambda_i)$

- (2)求出$J$后，得$AP=PJ$，设$P=(X_1,X_2,...,X_n)$，则$AX_i=X_iJ$，然后逐个解方程求出$X_i$（不止一解的取一），最后组成$P$。
- (3)最小多项式为 Smith 标准形中的$d_n(\lambda)$，特征值$\lambda_i$的几何重数等于对应 Jordan 块的个数，即$\dim Ker(A-\lambda_iI)^{k_i}=n-rank(A-\lambda_iI)^{k_i}$。

- 【经典例题】

【题型 2】子空间相关考察

- 【知识回顾】

1.子空间的和与交相关的等式、不等式

- 引理 **2.2.1**（子空间交与和的另类分配律）设$V_1,V_2,V_3$为域$F$上线性空间$V$的三个子空间，则有：

$$V_1 \cap (V_2 + V_3) \supseteq (V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3)$$

$$V_1 + (V_2 \cap V_3) \subseteq (V_1 + V_2) \cap (V_1 + V_3)$$

- 定理 **2.2.4**（子空间的维数公式）设$V_1, V_2$为域$F$上有限维线性空间$V$的两个子空间，则有：

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 + V_2)$$

2.子空间交与和的求法

3.子空间的直和与判定

- 大定理2.2.5（直和的四大等价命题）设$V_1, V_2$是域$F$上线性空间$V$的两个子空间，则下列命题等价：
  - (1)$V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$
  - (2)$V_1 \cap V_2 = 0$
  - (3)$V_1 + V_2$中 0 向量表法唯一
  - (4)$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$
  - (5)$V_1$的一个基与$V_2$的一个基的并是$V_1 + V_2$的一个基

4.不变子空间

5.根子空间

6.循环子空间

【题型 3】线性映射、线性变换的的矩阵表示、过渡矩阵相关的考察

- 【知识回顾】
- 【常见考法】
- (1)线性映射的矩阵表示：给出一个线性映射$A: V \to W$，以及$V, W$的一组基$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$和$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$，求$A$在该基下的矩阵表示。
- (2)过渡矩阵：给出线性空间$V$的两组基，求从第一组基$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$到第二组基$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$的过渡矩阵。

解：

- (1)$\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\mathcal{A}(\alpha_1), \mathcal{A}(\alpha_2), \ldots, \mathcal{A}(\alpha_n)) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)A$
- (2)设过渡矩阵为$P$，则有$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)P$，因此$P = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^{-1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$

- 【经典例题】

【题型 4】线性变换的像与核相关的考察

- 【知识回顾】
- 定理**3.2.3**(核与象的同构关系)设$A$是域$F$上线性空间$V$到线性空间$V'$的一个线性映射，则

$$V/KerA \cong ImA$$

在有限维情况下还有

$$\dim V = \dim KerA + \dim ImA$$

- （一个重要结论）设$A$是有限维线性空间$V$上的线性变换，$V = ImA \oplus KerA$的充要条件是$ImA = ImA^2$。
- 【常见考法】
- 【经典例题】

【题型 5】特殊线性变换的考察

- 【知识回顾】

1.投影变换

2.幂零变换

【题型 6】抽象线性映射理论的考察

- 【知识回顾】

# 五 · 具有度量的线性空间

## 5.1 双线性函数

**定义 5.1.1**（双线性函数）设$V$是域$F$上的线性空间，映射$f: V\times V\to F$称为双线性函数，如果对于任意的$\alpha,\beta,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in V$和任意的$k_1,k_2\in F$，有：

- (1)$f(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta)=k_1f(\alpha_1,\beta)+k_2f(\alpha_2,\beta)$
- (2)$f(\alpha,k_1\beta_1+k_2\beta_2)=k_1f(\alpha,\beta_1)+k_2f(\alpha,\beta_2)$

那么称$f$是$V$上的一个双线性函数，也可把$f$写成$f(\alpha,\beta)$。并且(1)式表明，当$\beta$固定时，映射$\alpha\mapsto f(\alpha,\beta)$是$V$上的一个线性函数，记作$\beta_R$；(2)式表明，当$\alpha$固定时，映射$\beta\mapsto f(\alpha,\beta)$是$V$上的一个线性函数，记作$\alpha_L$。

**定义 5.1.2**（双线性型）设$V$是域$F$上的$n$维线性空间，$V$中取一个基$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$，设$V$中向量$\alpha,\beta$在此基下的坐标分别为$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$。设$f$是$V$上的一个双线性函数，则$f(\alpha,\beta)=X^TAY$；反之，若$A$是$n\times n$矩阵，则$f(\alpha,\beta)=X^TAY$定义了一个双线性函数，且$f$在该基下的度量矩阵刚好是$A$。其中称$A=(f(\alpha_i,\beta_j))$是$f$在该基下的度量矩阵，$X^TAY$称为$X,Y$的双线性型。

下面，我们研究双线性函数在不同基下的度量矩阵之间的关系。

**定理 5.1.1**（双线性函数的度量矩阵的正交变换关系）设$V$是域$F$上的$n$维线性空间，$f$是$V$上的一个双线性函数，$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$和$\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$是$V$的两组基，设$f$在第一组基下的度量矩阵为$A$，在第二组基下的度量矩阵为$B$，则存在可逆矩阵$P$使得$B=P^TAP$，其中$P$是从第一组基到第二组基的过渡矩阵。

解：由题得

$$(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)P$$

任取$\alpha,\beta\in V$，则

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)X=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)X_0$$
$$\beta=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)Y=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)Y_0$$

则

$$X=PX_0,Y=PY_0$$

那么

$$f(\alpha,\beta)=X^TAY=X_0^TBY_0=X_0^TP^TAPY_0$$

则

$$B=P^TAP$$

上述结论表明，双线性函数在不同基下的度量矩阵是合同关系，而秩是合同不变量，因此我们可以定义双线性函数的秩和双线性函数的矩阵秩。

**定义 5.1.3**（双线性函数的秩与矩阵秩）设$V$是域$F$上的$n$维线性空间，$f$是$V$上的一个双线性函数，则$f$的矩阵秩$rank_m f$定义为$f$在任一基下的度量矩阵的秩。$f$的秩$rankf$定义为：记$V^\star$的下列子空间$\langle \alpha_L, \beta_R \mid \alpha, \beta \in V \rangle$为$f$的秩空间，记$f$的秩空间的维数为$rankf$。

**定义 5.1.4**（左根与右根）设$V$是域$F$上的线性空间，$f$是$V$上的一个双线性函数，则称所有$\alpha \in V$的集合是$f$在$V$的左根，若$\forall \beta \in V$，有$f(\alpha,\beta)=0$，记作$rad_L V$，称所有$\beta \in V$的集合是$f$在$V$的右根，若$\forall \alpha \in V$，有$f(\alpha,\beta)=0$，记作$rad_R V$。

容易验证，左根与右根都是$V$的子空间。

**定义 5.1.5**（双线性函数的退化与非退化）设$V$是域$F$上的线性空间，$f$是$V$上的一个双线性函数，如果$rad_L V = rad_R V = 0$，则称$f$是非退化的，否则称$f$是退化的。

**定理 5.1.2**（双线性函数的秩与退化的关系）设$V$是域$F$上的$n$维线性空间，$f$是$V$上的一个双线性函数，则$f$非退化的充要条件是$rank_m f = n$。

解：设$f$在$V$的一组基$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$下的度量矩阵为$A$，则$f$的矩阵秩$rank_m f = rank(A)$。任取$\alpha,\beta \in V$，设$\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)X$，$\beta = (\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)Y$，则$f(\alpha,\beta)=X^T AY$。则

$$\begin{aligned}
&\alpha \in rad_L V \\
\Leftrightarrow\ & f(\alpha,\beta)=0, \forall \beta \in V \\
\Leftrightarrow\ & X^T AY = 0, \forall Y \in F^n \\
\Leftrightarrow\ & X^T A = 0 \\
\Leftrightarrow\ & A^T X = 0
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
&rad_L V = 0 \\
\Leftrightarrow\ & rank(A^T) = n \\
\Leftrightarrow\ & rank(A) = n
\end{aligned}$$

即

$$rank_m f = n$$

**定义 5.1.6**（双线性函数的对称与斜对称）设$f$是域$F$上线性空间$V$的一个双线性函数，如果$f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$，则称$f$是对称的；如果$f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$，则称$f$是斜对称的。

显然，这个名称的由来与度量矩阵的对称性相同。

**定理 5.1.3**（对称双线性函数度量矩阵的简化形式是对角阵）设$f$是特征不为 2 的域$F$上的$n$维线性空间$V$的一个双线性函数，如果$f$是对称的，则$f$的度量矩阵在$F$上可对角化。

证：对维数做数学归纳。

1. 当$\dim V = 1$时，结论显然成立。

2.假设$n-1$维空间上结论成立，考虑$n$维空间。

- (1)若$f=0,A=0$，下面设$f\neq 0$，此时一定存在$\alpha_1\in V$且$\alpha_1\neq 0$使得$f(\alpha_1,\alpha_1)\neq 0$。（否则$\forall\alpha,\beta\in V,0=f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=2f(\alpha,\beta)$则$f=0$($char(F)\neq 2$保证这里推断成立)，矛盾）
- (2)把$\alpha_1$扩充成$V$的一个基$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$，令

$$\tilde{\alpha_\imath}=\alpha_i-\frac{f(\alpha_i,\alpha_1)}{f(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1$$

则$\forall i\in\{2,...,n\}$，$f(\tilde{\alpha_\imath},\alpha_1)=0$，且从构造式可以看出，$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$与$\alpha_1,\widetilde{\alpha_2},...,\widetilde{\alpha_n}$等价。因此，令$W=\langle\widetilde{\alpha_2},...,\widetilde{\alpha_n}\rangle$，则$V=\langle\alpha_1\rangle\oplus W$。

- (3)把$f$限制到$W$上，应用归纳假设，可得$W$中必定存在一个基$\eta_2,\eta_3,...,\eta_n$，使得$f|W$在该基下的度量矩阵是对角矩阵

$$\begin{pmatrix} f(\eta_2,\eta_2) & & & \\ & f(\eta_3,\eta_3) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\eta_n,\eta_n)\end{pmatrix}$$

由于$V=\langle\alpha_1\rangle\oplus W$，则$\alpha_1,\eta_2,...,\eta_n$是$V$的一组基。由于$f(\alpha_1,\tilde{\alpha_\imath})=0$，则$f(\alpha_1,\eta_i)=0$（因为$\eta_i$可以写成$\tilde{\alpha_\imath}$的线性组合）。并且$f$在该基下的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix} f(\alpha_1,\alpha_1) & & & \\ & f(\eta_2,\eta_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\eta_n,\eta_n)\end{pmatrix}$$

是对角矩阵。

证毕。

**定理 5.1.4**（斜对称双线性函数度量矩阵的简化形式是块对角阵） 设$f$是特征不为 2 的域$F$上的$n$维线性空间$V$的一个双线性函数，如果$f$是斜对称的，则存在$V$的一组基$\delta_1,\delta_{-1},...,\delta_r,\delta_{-r},\eta_1,\eta_2,...,\eta_s(s=n-2r,s\geq 0,r\geq 0)$，使得$f$的度量矩阵在$F$上可化为如下分块对角形式：

$$\begin{pmatrix} A & & & \\ & \ddots & & \\ & & A & \\ & & & B\end{pmatrix}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{pmatrix}$$

证：对维数$n$做数学归纳。

1.当$\dim V=1$时，结论显然成立。

2.假设$1,...,n-1$维空间上结论成立，考虑$n$维空间。

- (1)若$f=0,A=0$，下面设$f\neq 0$，此时一定存在线性无关的向量$\delta_1,\alpha_2$，使得$f(\delta_1,\alpha_2)\neq 0$。(否则对一切线性无关的向量$\alpha,\beta$，有$f(\alpha,\beta)=0$；又由于$f$是斜对称的，即$f(\alpha,\alpha)=-f(\alpha,\alpha)$有$f(\alpha,\alpha)=0$，对于线性相关的向量$\alpha,k\alpha$有$f(\alpha,k\alpha)=kf(\alpha,\alpha)=0$，则$f=0$，矛盾)
- (2)令$\delta_{-1}=f(\delta_1,\alpha_2)^{-1}\alpha_2$，则$f(\delta_1,\delta_{-1})=1$，且$f(\delta_{-1},\delta_1)=-1$。此时$\delta_1,\delta_{-1}$线性无关。把它们扩充成$V$的一个基$\delta_1,\delta_{-1},\beta_3,...,\beta_n$，令
$$\tilde{\beta}_\imath=\beta_i-f(\beta_i,\delta_{-1})\delta_1+f(\beta_i,\delta_1)\delta_{-1}$$
则$\forall i\in\{3,...,n\}$，$f\left(\tilde{\beta}_\imath,\delta_1\right)=0$且$f\left(\tilde{\beta}_\imath,\delta_{-1}\right)=0$。同样地，由构造式可以看出，$\delta_1,\delta_{-1},\beta_3,...,\beta_n$与$\delta_1,\delta_{-1},\widetilde{\beta_3},...,\widetilde{\beta_n}$等价。因此，令$W=\langle\widetilde{\beta_3},...,\widetilde{\beta_n}\rangle$，则$V=\langle\delta_1,\delta_{-1}\rangle\oplus W$。
- (3)把$f$限制到$W$上，应用归纳假设，可得$W$中必定存在一个基$\delta_3,\delta_{-3},...,\delta_{2r-1},\delta_{-(2r-1)},\eta_1,\eta_2,...,\eta_s(s=n-2r,s\geq 0,r\geq 0)$，使得$f|W$在该基下的度量矩阵是分块对角矩阵
$$\begin{pmatrix}A & & & \\ & \ddots & & \\ & & A & \\ & & & B\end{pmatrix}$$
由于$V=\langle\delta_1,\delta_{-1}\rangle\oplus W$，则$\delta_1,\delta_{-1},\delta_3,\delta_{-3},...,\delta_{2r-1},\delta_{-(2r-1)},\eta_1,\eta_2,...,\eta_s$是$V$的一组基。由于$f\left(\delta_1,\tilde{\beta}_\imath\right)=f\left(\delta_{-1},\tilde{\beta}_\imath\right)=0$，则$f\left(\delta_1,\delta_j\right)=f\left(\delta_{-1},\delta_j\right)=0(j=3,-3,...,2r-1,-(2r-1))$且$f(\delta_1,\eta_i)=f(\delta_{-1},\eta_i)=0(i=1,...,s)$。因此，$f$在该基下的度量矩阵为
$$\begin{pmatrix}A & & & \\ & \ddots & & \\ & & A & \\ & & & B\end{pmatrix}$$
是分块对角矩阵。

证毕。

从上述定理也可得出，若$V$上斜对称双线性函数$f$是非退化的，则$V$的维数必定是偶数（这是因为由定理 5.1.2 可知非退化⇔度量矩阵满秩/可逆，而 rank 是正交不变量，因此分块对角矩阵没有 B 这一项）。

下面我们研究对称双线性函数与二次型的关系。

**定义 5.1.7**（二次函数）设$V$是域$F$上的线性空间，映射$q:V\rightarrow F$称为二次函数，如果对于任意的$\alpha\in V$，存在一个对称双线性函数$f$使得$q(\alpha)=f(\alpha,\alpha)$，则称$q$是$V$上的一个二次函数。

可以看出，给定一个对称双线性函数$f$，就确定了一个二次函数$q$。反之，给定一个二次函数$q$，是否能唯一地确定一个对称双线性函数$f$呢？

定理 5.1.5（二次函数与对称双线性函数的关系）设$V$是特征不为 2 的域$F$上的线性空间，$q$是$V$上的一个二次函数，则存在唯一的对称双线性函数$f$使得$q(\alpha)=f(\alpha,\alpha)$。

证：由定义 5.1.7，存在一个对称双线性函数$\tilde{f}$使得$q(\alpha)=\tilde{f}(\alpha,\alpha)$。下面证明$\tilde{f}$是唯一的。设$f$是另一个满足$q(\alpha)=f(\alpha,\alpha)$的对称双线性函数，则

$$f(\alpha,\alpha)=q(\alpha)=\tilde{f}(\alpha,\alpha)$$

又由于$f,\tilde{f}$都是对称的，所以

$$f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=f(\alpha,\alpha)+2f(\alpha,\beta)+f(\beta,\beta)$$

且

$$\tilde{f}(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=\tilde{f}(\alpha,\alpha)+2\tilde{f}(\alpha,\beta)+\tilde{f}(\beta,\beta)$$

因此，

$$2f(\alpha,\beta)=f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)-f(\alpha,\alpha)-f(\beta,\beta)=\tilde{f}(\alpha+\beta,\alpha+\beta)-\tilde{f}(\alpha,\alpha)-\tilde{f}(\beta,\beta)=2\tilde{f}(\alpha,\beta)$$

由于$char(F)\neq 2$，所以$f(\alpha,\beta)=\tilde{f}(\alpha,\beta)$，证毕。

设$V$域$F$上的$n$维线性空间，$f$是$V$上的一个对称双线性函数，$q$是由$f$定义的二次函数，设$f$在$V$的一组基$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$下的度量矩阵为$A$，则对于$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)X,\beta=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)Y$，有$f(\alpha,\beta)=X^TAY$，$q(\alpha)=f(\alpha,\alpha)=X^TAX$。因此，对称双线性函数与二次函数的关系就体现在度量矩阵上：对称双线性函数的度量矩阵就是由它定义的二次函数的矩阵。因此，我们也可以用对称双线性函数的理论来研究二次型。

下面我们来研究双线性函数组成的空间的结构。

记$V$上所有双线性函数的集合为$T_2(V)$，容易验证，它对函数的加法和数乘封闭，因此$T_2(V)$是一个线性空间，称为$V$上的双线性函数空间。

现在设$\dim V=n$，$V$中取定一个基$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$，则$f\to A$的对应是$T_2(V)\to M_n(F)$的一个映射，且它是双射，并且容易验证保持线性运算，因此$T_2(V)$与$M_n(F)$线性同构。由于$\dim M_n(F)=n^2$，所以$\dim T_2(V)=n^2$。这也不难理解，在$V$中取一组基$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$，则$f$在该基下的度量矩阵$A$唯一；每个线性变换$\mathcal{A}$在该基下有唯一的矩阵，从而在双线性函数和线性变换之间建立起了一一对应。

我们把$V$上所有对称双线性函数的集合记为$S_2(V)$，把$V$上所有斜对称双线性函数的集合记为$\Lambda_2(V)$，则$S_2(V),\Lambda_2(V)$都是$T_2(V)$的子空间，并且有如下结论：

定理 5.1.6（双线性函数空间的分解）设$V$是特征不为 2 的域$F$上的线性空间，则

$$T_2(V)=S_2(V)\oplus\Lambda_2(V)$$

证：

- (1) 先证$T_2(V)=S_2(V)+\Lambda_2(V)$：任取$f\in T_2(V)$，令

$$g(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}[f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha)]$$

$$h(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}[f(\alpha,\beta)-f(\beta,\alpha)]$$

这里的$\frac{1}{2}$指的是$(2e)^{-1}$，其中$e$是域$F$的单位元，那么$g$是对称的，$h$是斜对称的，并且$f=g+h$，因此$T_2(V)=S_2(V)+\Lambda_2(V)$。

- (2)再证$S_2(V)\cap\Lambda_2(V)=\{0\}$：任取$f\in S_2(V)\cap\Lambda_2(V)$，则

$$f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)=-f(\beta,\alpha)$$

又$char(F)\neq 2$，因此$f=0$。

证毕。

下面我们来寻找$\dim V=n$时的$T_2(V)$的一组基。（证明过程暂略）

**定义 5.1.8**（张量积）给出$V$上的两个线性函数$g,h$，定义$g\otimes h:V\times V\to F$为$(g\otimes h)(\alpha,\beta)=g(\alpha)h(\beta)$，则容易验证$g\otimes h$是由$g,h$生成的一个双线性函数，称$g\otimes h$是$g,h$的张量积。

**定理 5.1.7**（$T_2(V)$的一组基）设$V$是域$F$上的$n$维线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$是$V$的一组基，设$g_i:V\to F$是与基向量$\alpha_i$对应的线性函数，即$g_i(\alpha_j)=\delta_{ij}$，则$\{g_i\otimes g_j\mid i,j=1,...,n\}$是$T_2(V)$的一组基。

下面我们来讨论$f$的秩与矩阵秩的关系。

**定义 5.1.9**（双线性函数的张量形式表示）设$V$是域$F$上的$n$维线性空间，$f$是$V$上的一个双线性函数，设$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$是$V$的一组基，设$g_i:V\to F$是与基向量$\alpha_i$对应的线性函数，即$g_i(\alpha_j)=\delta_{ij}$，则$f=\sum_{i,j=1}^{n}f(\alpha_i,\alpha_j)g_i\otimes g_j$称$f$的上述表示为$f$的张量形式表示。

**定理 5.1.8**（双线性函数的秩与矩阵秩的关系）设$V$是域$F$上的$n$维线性空间，$f$是$V$上的一个双线性函数，则$f$的秩$rankf$大于等于$f$的矩阵秩$rank_m f$。

**定理 5.1.9**（双线性函数的秩与矩阵秩相等的条件）设$V$是域$F$上的$n$维线性空间，$f$是$V$上的一个对称双线性函数，则$f$的秩$rankf$等于$f$的矩阵秩$rank_m f$。

## 5.2 补充练习

【T1】在$K^4$中，设$\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$，令$f(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_4y_4$

- (1)证明$f$是$K^4$上的一个双线性函数；
- (2)求$f$在$K^4$的标准基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$下的度量矩阵；
- (3)说明$f$非退化；
- (4)说明$f$是对称的；
- (5)求一向量$\alpha\neq 0$，使得$f(\alpha,\alpha)=0$；

解：

- (1)

$$f(\alpha,\beta)=X^T\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-1\end{pmatrix}Y$$

得证。

- (2)

$$A=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-1\end{pmatrix}$$

- (3)由于$A$可逆，所以$f$非退化。
- (4)由于$A$是对称矩阵，所以$f$是对称的。
- (5)设$\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$，则

$$f(\alpha,\alpha)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2$$

因此，任取$x_1,x_2,x_3$，令$x_4=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$，则$\alpha\neq 0$且$f(\alpha,\alpha)=0$。

【T2】定义映射$f:M_n(F)\times M_n(F)\to F$为$f(A,B)=\operatorname{tr}(AB^T)$，证明：$f$是非退化对称双线性函数。

证：任取$A_1,A_2,B_1,B_2\in M_n(F),k_1,k_2\in F$，有

$$f(k_1A_1+k_2A_2,B)=\operatorname{tr}((k_1A_1+k_2A_2)B^T)=k_1\operatorname{tr}(A_1B^T)+k_2\operatorname{tr}(A_2B^T)=k_1f(A_1,B)+k_2f(A_2,B)$$

以及

$$f(A,k_1B_1+k_2B_2)=\operatorname{tr}\left(A(k_1B_1+k_2B_2)^T\right)=k_1\operatorname{tr}(AB_1^T)+k_2\operatorname{tr}(AB_2^T)=k_1f(A,B_1)+k_2f(A,B_2)$$

因此，$f$是双线性函数。又由于$\operatorname{tr}(AB^T)=\operatorname{tr}(BA^T)$，所以$f$是对称的。最后，

$$f(E_{ik},E_{jl})=\operatorname{tr}(E_{ik}E_{lj})$$

$$E_{ik}E_{lj}=\begin{cases}E_{ij} & k=l\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

故

$$f(E_{ik},E_{jl})=\begin{cases}1 & i=j\wedge k=l\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

则$f$在基$E_{11},E_{12},...,E_{nn}$下的度量矩阵为$I_{n\times n}$，因此，$f$非退化。